Dans son livre *Le développement de la géométrie aux IXe–XIe siècles : Abū Sahl al-Qūhī*[1], Philippe Abgrall poursuit un double objectif : compléter les éditions déjà existentes de l'œuvre du géomètre al-Qūhī et réaliser une synthèse historique sur ce mathématicien. Ce livre nous offre l'édition *princeps* de deux traités d'al-Qūhī : *Les centres des cercles tangents sur des lignes, par la méthode de l'analyse* et *La détermination de deux droites à partir d'un point suivant un angle connu, par la méthode de l'analyse.* P. Abgrall donne de plus une nouvelle édition, critique, de textes ayant déjà fait l'objet d'éditions qu'il a jugées insuffisantes sous l'angle de la rigueur : un opuscule intitulé *Deux problèmes géométriques*, et les quatre lettres de la correspondance entre al-Qūhī et Abū Isḥaq al-Ṣābi'. Chacun de ces textes est accompagné d'une traduction en français et d'un commentaire mathématique. Quant aux textes dont des éditions critiques satisfaisantes existent déjà, l'analyse mathématique qu'il en donne est suffisamment précise et autonome pour dispenser le lecteur d'avoir constamment le texte original sous les yeux : c'est le cas de *La mesure du paraboloïde*[2], du *Traité sur le compas parfait*, d'autres courts mémoires ou fragments sur des problèmes solides résolus par intersection de coniques, et enfin du *Traité sur l'astrolabe*[3]. Pour ce dernier texte, le commentaire mathématique est assorti d'une comparaison rigoureuse et d'un choix entre les deux éditions existantes qui divergent quant à la compréhension du texte.

P. Abgrall montre que, comme ses prédécesseurs Thābit ibn Qurra et Ibn Sinān, et ses contemporains al-Sijzī et Ibn Sahl, al-Qūhī appartient à une double tradition apollonienne et archimédienne (mise en évidence par R. Rashed), et qu'il « multiplie les démarches d'application » : qu'il applique ainsi les coniques à la construction des problèmes solides et à l'étude de l'astrolabe, les transformations géométriques aux problèmes de contact[4] et à la théorie des coniques[5], ou encore la statique à la théorie de la mesure (il réduit la quadrature du cercle à la détermination d'un centre de gravité). Un trait saillant de l'œuvre d'al-Qūhī est le concept même de section conique, amené à changer, dans le sens d'une unification. P. Abgrall insiste en particulier sur l'« élégance de style » qui pousse al-Qūhī à juxtaposer, dans ses démonstrations, le cas de l'hyper-

[1]Philippe Abgrall, *Le développement de la géométrie aux IXe–XIe siècles : Abū Sahl al-Qūhī*, Albert Blanchard, Paris, 2004.

[2]Edité et traduit par R. Rashed dans *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, vol. I (Londres, 1996), p. 850–883.

[3]Le *Traité sur le compas parfait* a été édité et traduit par R. Rashed dans *Geometry and dioptrics in classical Islam*, Londres, 2005, p. 726–797. Deux des textes sur les problèmes solides avaient été traduits par Woepcke ; quant aux autres, certains ont été édités et traduits par divers auteurs (A. S. Saidan, A. Sayili, W. Knorr, J. P. Hogendijk), et ils le sont tous par R. Rashed, dans *Les mathématiques infinitésimales*, vol. III, pour l'heptagone, et pour les autres dans *Geometry and dioptrics.* Le *Traité sur l'astrolabe* a été édité et traduit par R. Rashed dans *Géométrie et dioptrique au Xe siècle – Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Les Belles Lettres, Paris, 1993, p. 190–230 (puis réédité et traduit en anglais dans *Geometry and dioptrics*). Une édition et une traduction anglaise figurent aussi dans l'article de J. L. Berggren, « Abū Sahl al-Kūhī's Treatise on the Construction of the Astrolabe with Proof : Text, Translation and Commentary », *Physis*, 31, nouv. sér. (1994), p. 141–252.

[4]*cf.* P. Abgrall, *Le développement de la géométrie aux IXe–XIe siècles*, p. 320.

[5]*ibid.* p. 168–169.

bole et celui de l'ellipse, faisant ainsi sentir ce qui unit et ce qui distingue ces deux courbes. Ce qui les distingue : une simple différence de signe, que ce soit dans leur caractérisation focale[6] (dans *Les centres des cercles tangents*) ou bien dans leur caractérisation par diamètre et côté droit[7] (dans *Le traité sur le compas parfait*). Parabole, cercle et droite sont toujours considérés par al-Qūhī au même titre que l'hyperbole et l'ellipse ; l'ensemble de ces courbes dessine donc une certaine classe, celle des lignes « mesurables »[8].

Le changement dans le concept de section conique consiste aussi en un déplacement des normes démonstratives. En ce X^{e} siècle, l'utilisation des coniques pour la construction des problèmes solides, jusqu'alors intermittente, devient un chapitre entier de la géométrie. P. Abgrall commente de manière détaillée les exemples de cette méthode présents dans l'œuvre d'al-Qūhī : exemples anciens (les deux moyennes proportionnelles, la trisection de l'angle, la construction de l'heptagone, ainsi que deux autres problèmes solides issus de la tradition archimédienne) ou nouveau (la construction d'un certain pentagone équilatéral mais non équiangle inscrit dans un carré). Mais cette utilisation des sections coniques donne au *symptoma* un statut proche de celui d'« équation de la courbe », tout particulièrement dans les analyses[9]. Cette transformation se poursuivra dans l'œuvre d'al-Khayyām qui traduira toutes les équations cubiques (à une inconnue) de l'algèbre en problèmes solides. Al-Khayyām appliquera ainsi les méthodes de construction de problèmes solides par intersection de coniques à l'algèbre. On louera, avec P. Abgrall, F. Woepcke d'avoir, le premier, fait connaître al-Qūhī au XIX^{e} siècle en publiant deux de ses travaux (sur les deux problèmes solides issus de la tradition archimédienne : *Le lemme à la division de la droite* et *Les segments de sphère*[10]) en annexe à sa traduction du traité d'algèbre d'al-Khayyām. P. Abgrall, dans le commentaire qu'il nous offre de ces deux textes, éclaire encore davantage ce progrès subtil[11], auquel on risquerait d'être aveugle, à observer le style géométrique d'al-Qūhī.

Cette algébrisation ténue n'est pas la seule conséquence de l'étude systématique des méthodes de construction des problèmes solides. Cette étude amène al-Qūhī, dans *Les centres des cercles tangents*, à distinguer deux types de démonstrations. Dans cet ouvrage, il se propose de trouver le lieu du centre d'un cercle tangent à deux éléments parmi point, droite et cercle. En général, ce lieu est une section conique. Pour rendre le problème déterminé, il se propose de chercher l'intersection du lieu solution avec une ligne arbitraire. Précaution

---

[6] *ibid.* p. 10 et p. 193.

[7] *ibid.* p. 177.

[8] *cf.* p. 195, où P. Abgrall utilise la locution « lignes régulières » pour traduire l'expression d'al-Qūhī, que R. Rashed a récemment préféré rendre par « lignes mesurables » (*cf. Geometry and dioptrics*, p. 668).

[9] *cf.* par exemple p. 189 et 204, le recours au *symptoma* comme caractérisant les points d'une parabole (en toute rigueur, il faudrait pour le justifier écrire une réciproque à *Coniques*, I.11).

[10] Woepcke doute de l'attribution de l'un d'eux (« Le lemme à la division de la droite ») à al-Qūhī. Ce texte a été édité et traduit à nouveau par R. Rashed (*Les mathématiques infinitésimales*, vol. III) qui l'attribue à al-Qūhī en se basant sur une analyse du contenu.

[11] *cf.* p. 131, 136, et aussi p. 344.

toute formelle, puisqu'il ne s'interroge même pas, ici, sur l'existence et le nombre des points d'intersection. Mais il distingue pourtant le cas où la ligne arbitraire est une droite. Le problème (que l'on peut interpréter comme étant l'intersection d'une section conique et d'une droite) devient alors un problème plan, entièrement résoluble dans le cadre euclidien, et pour lequel al-Qūhī donne une démonstration propre, sans recours aux sections coniques. P. Abgrall y voit un procédé de construction du lieu solution (une section conique) *par points*[12], à opposer au procédé de construction décrit par al-Qūhī dans *Le traité du compas parfait*, tracé *continu* au moyen d'un instrument qui conduirait à la possibilité d'une démonstration, en géométrie pure, de l'existence des points d'intersection des coniques. Quant à ce dernier procédé, remarquons qu'au moins dans un cas (le problème archimédien des « segments de sphère »), al-Qūhī étudie l'existence du point d'intersection des coniques utilisées suivant la valeur des données du problème[13]. C'est en cherchant la valeur des données pour lesquelles les deux sections coniques sont tangentes l'une à l'autre qu'il obtient une valeur limite pour l'existence de solutions.

Enfin, à un niveau plus général, l'œuvre d'al-Qūhī et l'étude qu'en donne P. Abgrall nous aident à mieux comprendre l'histoire du chapitre des problèmes de constructions géométriques (et non seulement les problèmes *solides*). P. Abgrall penche pour l'hypothèse que c'est la réflexion sur des problèmes de constructions organisés autour d'un thème (réflexion dont un exemple des plus élaborés, incluant la construction de problèmes solides, sera, au siècle suivant, l'*Achèvement des Coniques* d'Ibn al-Haytham), et l'étude des méthodes (l'analyse géométrique, à la suite du *Traité de l'analyse et de la synthèse* d'Ibn Sinān, et l'utilisation des *Données* d'Euclide[14]) qui fut le moteur de production d'un genre particulier de traités, consistant en des collections de lemmes, permettant en retour des démonstrations plus complexes dans les traités où ils sont utilisés. C'est le cas de deux ouvrages d'al-Qūhī : *La détermination de deux droites à partir d'un point suivant un angle connu, par la méthode de l'analyse* et *La génération de points sur les droites suivant des rapports dont les termes sont des surfaces*, texte dont seuls des passages nous sont parvenus. Al-Qūhī utilise certains de ces lemmes dans *Le traité sur le compas parfait* et dans *L'art de l'astrolabe*. La correspondance entre al-Qūhī et al-Ṣābi' donne d'ailleurs de précieux renseignements sur ce genre de collection de lemmes, qui permettent à P. Abgrall d'y repérer, dans le cas d'al-Qūhī, la trace d'un modèle apollonien[15]. Les troisième et quatrième lettres nous montrent d'ailleurs l'exemple d'une recherche menée en commun par al-Qūhī et al-Ṣābi', nos deux auteurs étudiant chacun différents problèmes de constructions autour d'un même thème[16].

Quant au domaine des transformations géométriques, le *Traité sur l'art de*

[12] *cf.* p. 183–185.
[13] *cf.* p. 135–136.
[14] *cf.* p 179–181, ainsi que n. 42 p. 220.
[15] *cf.* p. 218 n. 39. P. Abgrall va même jusqu'à former l'hypothèse que le mémoire sur *La génération de points* serait une tentative de reconstitution du premier livre de *La section déterminée* d'Apollonius, *cf.* p. 20 n. 14 et p. 263–264.
[16] Trouver une tangente à un cercle, vérifiant certaines conditions, *cf.* p. 62–66 de la lettre L3 et p. 106–120 de la lettre L4.

l'astrolabe commence par un chapitre théorique sur les projections coniques et cylindriques, ce en quoi son auteur fait ici, selon P. Abgrall, œuvre de pionnier ; la lecture de ce chapitre est facilitée par l'important commentaire contemporain d'Ibn Sahl. Dans les démonstrations de ce traité, al-Qūhī innove en développant un recours systématique à des « rabattements », le plan des figures qu'il construit représentant à la fois le plan du méridien du lieu et le plan image de la projection stéréographique (c'est-à-dire le plan de l'équateur) rabattu sur ce dernier. Enfin, dans l'opuscule intitulé *Deux problèmes géométriques*, al-Qūhī nous offre l'étude de l'image d'un cercle par une autre classe de transformations géométriques : les homothéties.

La correspondance entre al-Qūhī et al-Ṣābi' nous renseigne surtout sur le contenu d'un ouvrage perdu d'al-Qūhī, *Sur les centres de gravité*[17]. Mais elle est aussi un témoin rare et précieux de l'activité mathématique de deux savants du Xe siècle, étant écrite dans un style moins académique qu'un « traité », et elle permet à P. Abgrall un éclairage épistémologique de certains concepts en gestation. Il en est ainsi de la notion de « rapport connu en tant que rapport d'existence »[18], ou bien du statut de méthodes d'approximation comme celle utilisée par Archimède dans son traité *La mesure du cercle*[19]. Le prix de ces réflexions est une erreur commise par al-Qūhī, qui nous renseigne aussi sur les choix heuristiques d'un géomètre du Xe siècle. Ayant observé une régularité apparente[20] entre les positions des centres de gravité d'un tronc de cône, d'un segment de paraboloïde et d'un segment de sphère, al-Qūhī croit pouvoir en conclure à une valeur erronée de $\pi = \frac{28}{9}$. Il n'abandonne pas l'esprit critique et insiste sur le fait que ce résultat est « encore en suspens »[21], mais rejette l'approximation de π donnée par Archimède dans *La mesure du cercle*, et exprime un certain mépris vis-à-vis de cette méthode d'approximation, au profit de la méthode d'exhaustion rigoureuse et « exacte » (utilisée par Archimède dans la mesure d'un segment de parabole)[22]. Il écrit d'ailleurs lui-même un traité sur la mesure du paraboloïde, dont P. Abgrall (après R. Rashed) montre la ressemblance avec l'ouvrage d'Archimède sur le même sujet, inconnu au temps d'al-Qūhī[23]. Les attitudes exprimées par al-Qūhī dans la correspondance ne sont pas le fruit d'une idéologie naïve, mais bien le reflet des normes scientifiques d'une époque et d'un milieu que nous commençons seulement à mieux comprendre.

En plus des visées positives atteintes – édition critique, synthèse historique – mentionnées ci-dessus, P. Abgrall a su rester modeste alors qu'il poursuit avec beaucoup de succès au long de cet ouvrage un idéal élevé, idéal qu'il décrit brièvement dans l'introduction, après avoir retracé le sort réservé à la géométrie arabe chez les historiens des mathématiques depuis le XVIIIe siècle : « invalider la doctrine selon laquelle la géométrie a stagné entre le Ve et le XVe siècle ».

[17] *cf.* p. 21–29. On trouve d'autres traces de cet ouvrage dans un traité d'al-Khāzinī , *cf.* p. 13, n. 13.

[18] *cf.* p. 27 du commentaire de P. Abgrall, et p. 68–78 de la correspondance.

[19] *cf.* p. 34 du commentaire de P. Abgrall, et p. 96–104 de la correspondance.

[20] « Une harmonie selon un agencement étonnant de rapports numériques », p. 96.

[21] *cf.* p. 98.

[22] *cf.* p. 102.

[23] *cf.* p. 122-128.