L'œuvre algébrique de Johannes Faulhaber*

Erwan Penchèvre

Février 2003

Table des matières

*Paru dans *Oriens – Occidens*, Cahiers du Centre d'Histoire des Sciences et des Philosophies Arabes et Médiévales, n°5, 2004, p. 187–222.

1 Introduction

L'historien des mathématiques Kästner décrivait Johannes Faulhaber comme étant « le plus célèbre des cossistes allemands du premier tiers du XVII^{e} siècle »[1]. L'intérêt de ce personnage est rehaussé pour nous par le fait qu'il se trouve à la charnière entre deux périodes de l'histoire des mathématiques, juste avant le renouveau causé par l'œuvre de Descartes. Cette représentation est aussi adoptée par le livre d'Ivo Schneider, *Johannes Faulhaber 1580–1635 : Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs* (1993), qui décrit la confrontation, au début du XVII^{e} siècle, entre le milieu professionnel des *Rechenmeister* (auquel appartenait Faulhaber), et le groupe des « grands amateurs de mathématiques », tels Descartes et Viète. Par là-même, Ivo Schneider tente cependant de déconstruire le mythe de la supériorité de l'un sur l'autre, mythe auquel il rattache les descriptions d'une « rencontre » entre Faulhaber et Descartes, racontées par les premiers biographes de Descartes dès le XVII^{e} siècle[2].

Dans cet article, je m'inspire du travail d'Ivo Schneider tout en explorant un aspect de l'œuvre de Faulhaber peu mis en valeur par cet auteur. Faulhaber est célèbre pour ses travaux sur les sommes des séries de puissances, qui ont inspiré Jacques Bernoulli. Il est facile de rattacher cet intérêt pour l'arithmétique et l'analyse combinatoire aux spéculations mystiques sur les nombres pour lesquelles Faulhaber était aussi célèbre en son temps, puisqu'elles lui valurent un emprisonnement en 1606 (pour avoir prédit la fin du monde, comme l'avait fait Michael Stifel en 1533), puis un procès en 1618 (pour avoir prédit le passage d'une comète, qui pourtant eut bien lieu). Mais Faulhaber est moins connu pour son œuvre algébrique, qui n'est pas textuellement séparée de son œuvre arithmétique, et qui est obscurcie par la comparaison avec l'œuvre ultérieure de Descartes (celle-ci appartenant à une tradition bien différente, de géométrie algébrique). Je reprends donc dans cet article l'analyse de trois de ses principaux ouvrages, dans le but d'éclaircir son rapport à l'algèbre. Le premier, l'*Arithmetischer Cubicossischer Lustgarten* (1604) est un livre constitué de 160 énoncés de problèmes, auquel un autre *Rechenmeister*, Peter Roth, jugea bon de répondre par une *Arithmetica Philosophica* publiée en 1608, principalement consacrée à la résolution de ces 160 problèmes[3]. Faulhaber fut mécontent de ce coup porté à ses intérêts financiers (il réclamait en effet un salaire des personnes désireuses d'apprendre de lui les résolutions de ses problèmes). Il tenta de récupérer le plus possible d'exemplaires imprimés de l'*Arithmetica Philosophica* pour éviter qu'ils ne circulent, et peut-être aussi pour s'en servir comme manuel d'enseignement dans son école à Ulm[4]. Faulhaber et Roth finirent par

[1] cf. [17], vol. III, p. 29.

[2] La possibilité d'une telle rencontre n'est cependant pas niée par Ivo Schneider, ni par les autres auteurs (Kurt Hawlitschek, Kenneth L. Manders) qui se sont penchés sur cette question. J'aborderai dans les notes de cet article quelques aspects de cette « rencontre » .

[3] Je n'ai pas travaillé directement sur le *Lustgarten*. Les références ci-dessous renverront donc toujours à l'*Arithmetica Philosophica*, qui reproduit tous les énoncés des 160 problèmes.

[4] Le livre d'Ivo Schneider contient beaucoup de détails biographiques, rendus possibles par la correspondance entre Faulhaber et Kurz (un autre *Rechenmeister*, de Nürnberg), s'étendant

conclure un pacte : Faulhaber obtint un certain nombre d'exemplaires imprimés, et ils s'engagèrent tous deux à ne plus écrire d'algèbre pendant quelques temps. Roth mourut en 1617. A la suite de cette confrontation, Faulhaber se tourna d'avantage vers la « praxis mathématique », en particulier les techniques de fortification militaire, l'arpentage, la perspective, et les instruments de mathématiques. Cette spécialisation lui valut quelque succès pendant la Guerre de Trente Ans (1618–1648), mais ne l'empêcha pas de prolonger son œuvre arithmético-algébrique. C'est en 1619–1620 que se situe l'éventuelle rencontre avec Descartes. Les deux autres ouvrages dont il sera question ci-dessous sont la *Miracula Arithmetica* (1622) et l'*Academia Algebrae* (1631).

2 Le « cubiccoß »

En 1631, dans son *Academia Algebrae*, son dernier traité d'algèbre, Faulhaber nous donne une vue rétrospective de son œuvre, sous la forme de recommandations suivant la préface et décrivant au lecteur les différentes étapes de l'initiation qu'il doit avoir reçue, en algèbre, avant de pouvoir aborder cet ouvrage :

> *Conseils rapides pour apprendre le Coß.*
>
> Si quelqu'un veut apprendre le Coß avec succès, rapidement et *fundamentaliter*, qu'il suive mon conseil. Qu'il acquiert d'abord le Christoff Rudolff ou le Michael Stiffel, et y apprenne les *principia* et les *species* du Coß, l'*algorithmum* des binômes, des résidus et des nombres irrationnels[5], et ce qui s'y rapporte de semblable ; qu'il étudie ensuite dans de tels livres les première, seconde, troisième et quatrième règles du Coß [6], c'est-à-dire le Coß linéaire ; maintenant, là où sont comparées simplement deux quantités l'une avec l'autre, il peut apprendre le Quadrat Coß, c'est-à-dire les 5ème, 6ème, 7ème et 8ème règles de Christoff Rudolph, dont j'ai résolu tous les exemples par la *regul falsi*. Maintenant, s'il veut passer au Cubiccoß, il peut acquérir le Cardan, ou bien, puisqu'il préfèrerait un auteur allemand, qu'il s'essaie à mon Arithmetischen Cubiccossischen Lustgarten (dans lequel j'ai exposé les premiers *exempla* de toutes les règles successives - y compris du Quadrat Coß - avec un soin particulier), tel que feu Petrus Roth l'a expliqué ; il y trouvera non seulement les 13 règles de Cardan, mais encore presque tout ce qui appartient au Cubiccoß. J'avais certes voulu donner à imprimer avant lui [Petrus Roth] mon

sur la période 1604–1633, dont une grande partie est conservée à la Bibliothèque Nationale de France. Schneider dresse la liste des manuscrits en question (cf. [28], p. 239–245). Kurt Hawlitschek en donne des extraits importants dans [14].

[5] Il s'agit de l'étude des irrationnelles euclidiennes et des formules visant à simplifier les expressions de la forme $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ou $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$.

[6] Les « huit règles du Coß de Christoff Rudolff » enseignent respectivement la résolution des huit formes d'équations suivantes : (1) $ax=b$, (2) $ax^2=b$, (3) $ax^3=b$, (4) $ax^4=b$, (5) $x^2+bx=c$, (6) $x^2+c=bx$, (7) $x^2=bx+c$, (8) $x^4+bx^2=c$.

> Cubiccosischer Lustgarten résolu *compendiosè*. Mais parce que Petrus Roth a observé que cela pourrait porter atteinte à son propre ouvrage, l'Arithmetica Philosophica, il a passé contrat avec moi, par l'intermédiaire de mon ami fraternel, le mathématicien de Nürnberg Sebastian Kurz, pour que je suspende ce projet ; j'y ai alors consenti. Mais il pourrait encore peut-être arriver, si je publie entretemps mon *General Opus Mathematicum* sur toutes les disciplines, que cela soit englobé dans cet ouvrage-ci ; si Dieu le veut.[7]

Si Faulhaber rappelle sa confrontation avec Roth, il ne semble pas en avoir gardé rancune, puisque c'est finalement à l'*Arithmetica Philosophica*, le traité de Roth, qu'il renvoie ici son lecteur désireux d'apprendre le « Cubiccoß », c'est-à-dire la résolution des équations du troisième degré.
C'est aussi par cet ouvrage qu'il nous faut aborder l'étude de l'œuvre algébrique de Faulhaber[8]. Plus des trois quarts en sont consacrés à la résolution des 160 problèmes du *Cubicossischer Lustgarten*. Roth et Faulhaber étaient tous deux *Rechenmeister* (l'un à Nürnberg, l'autre à Ulm), et l'*Arithmetica Philosophica* n'est postérieure que de 4 ans au *Cubicossischer Lustgarten* de Faulhaber. Ces deux ouvrages renvoient à une même période, à un même milieu professionnel et probablement aussi à des méthodes semblables.
Selon Ivo Schneider, l'*Arithmetica Philosophica* est l'un des tout premiers ouvrages à pleinement réaliser la « réception » des formules de Cardan en langue allemande[9].

La première partie de l'*Arithmetica Philosophica* comporte 13 chapitres, correspondant aux 13 formes canoniques de l'équation cubique. Bien que Roth ne le formule pas de manière générale, il se dégage facilement de son exposé que chaque forme canonique appartient à l'un des cas de figures suivants :
- une unique racine positive ;
- une racine positive et 0, 1 ou 2 racines négatives ;
- une racine négative et 0, 1 ou 2 racines positives ;
- 1, 2 ou 3 racines positives.

[7] « Kurtz Bedencken von der Coß zu lehrnen » , faisant suite à la préface de [12], et cité intégralement par Kästner, [17], vol. III, p. 143–144.

[8] L'*Arithmetica Philosophica* est composée de trois parties. La première (p. 1–18) est un exposé sur la résolution des équations cubiques. La deuxième (p. 19–174) consiste en la résolution détaillée des 160 problèmes de Faulhaber. La troisième (p. 175–192) propose 103 nouveaux problèmes, sans leurs résolutions, conduisant à des équations de degrés 4, 5, 6, 7. Cet ouvrage présente aussi un intérêt en rapport avec l'initiation mathématique du jeune Descartes. Celui-ci le mentionne en effet dans ses *Cogitationes Privatae*, cf. [7], vol. X, p. 242. D'ailleurs, les problèmes de la troisième partie ne sont pas sans rapport avec le contenu des *Progymnasta de solidorum elementis* ([8]) : Roth propose plusieurs problèmes mêlant des nombres figurés et le calcul des diamètres des sphères inscrites dans certains polyèdres irréguliers. Ce lien n'a pas encore été exploré, à ma connaissance.

[9] cf. [28], p. 61–66, en particulier p. 65 : « offenbar war man in Kreisen deutscher Rechenmeister erst um 1600 bereit, solche Radikalschachteln als sinnvolle Lösungen anzunehmen » . Ivo Schneider se base sur une comparaison des exposés respectifs de Cardan, Johann Jung (*Rechenmeister* à Lübeck, auteur d'un traité d'algèbre vers 1578), Michael Stifel et Peter Roth. Le « retard » dans la réception des formules de Cardan renvoie aussi à la question de la réception de l'algèbre elle-même, en langue allemande. Pour un article récent sur les origines de la tradition algébrique allemande, cf. Menso Folkerts [13].

Pour les trois derniers cas, le nombre des racines dépend de la valeur du discriminant, que Roth indique pour les formes trinômes, auxquelles il ramène toutes les autres formes. Tous ces résultats étaient déjà sensibles dans l'œuvre de Cardan (cf. chapitre I de l'*Ars Magna*), et même, à quelques différences près, dans celle de 'Umar al-Khayyām ou de Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī[10]). Roth dit clairement que le nombre maximum de racines (réelles) d'une équation de degré n est n, et insiste particulièrement sur le fait qu'il ne s'agit que d'un maximum, pas toujours réalisé. Sauf dans le cas de trois racines réelles (cas « irréductible »), il applique les formules de Cardan. Pour le cas irréductible, il propose des méthodes numériques pour chercher les solutions entières. Il expose en détail ces méthodes pour les trois premières formes canoniques (équations trinômes sans terme en x^2). Pour les autres formes, il utilise des changements de variable afin de se ramener aux trois premières.
En fait, comme les problèmes traités dans l'*Arithmetica Philosophica* conduisent en général à des solutions rationnelles, le procédé numérique suffit dans beaucoup de cas, et est donc adopté de préférence à l'emploi des formules de Cardan. Roth enjoint en effet à rechercher d'abord les solutions entières, puis seulement, s'il n'en existe pas, à utiliser les formules de Cardan. Mais étant donnée une équation à coefficients rationnels, Roth la transforme toujours en une équation à coefficients entiers, unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1)[11]. Les solutions rationnelles d'une telle équation sont entières, et se prêtent donc au procédé numérique en question.
Décrivons rapidement l'ensemble des outils utilisés par Roth.

2.1 Les procédés numériques pour les trois premières formes canoniques

Les procédés numériques consistent simplement à tester l'équation pour toutes les valeurs entières de x à partir d'une valeur limite, qui dépend de la forme canonique et du rapport de grandeurs entre deux coefficients :
- pour $x^3 + bx = c$, lorsque $\frac{c}{b}$ est grand, la valeur limite est $x \leq \sqrt[3]{c}$; lorsque $\frac{c}{b}$ est petit, c'est $x \geq 1$; le procédé donne l'unique racine positive.
- pour $x^3 = bx + c$, lorsque $\frac{c}{b}$ est grand, c'est $x \geq \sqrt[3]{c}$; lorsque $\frac{c}{b}$ est petit, c'est $x \geq \sqrt{b}$; le procédé donne l'unique racine positive[12].
- pour $x^3 + c = bx$, lorsque $\frac{c}{b}$ est grand, c'est $x \geq 1$; lorsque $\frac{c}{b}$ est petit, c'est $x \leq \sqrt{b}$; le procédé donne une racine positive, il y en a parfois deux[13].
Faulhaber connaissait un autre procédé numérique, attribué à Johann Jung[14],

[10]cf. [23] pour Khayyām, et [16], p. 11–28 pour Ṭūsī. Ceux-ci ne prenaient cependant pas en compte les racines négatives, et n'indiquaient pas la possibilité de 3 racines positives.

[11]Il divise d'abord l'équation par le coefficient dominant pour obtenir une équation unitaire, puis fait un changement de variable de la forme $x = ay$ pour supprimer les fractions.

[12]La valeur limite $x \geq \sqrt{b}$ s'obtient facilement à partir de la factorisation $(x^2 - b)x = c$.

[13]$x \leq \sqrt{b}$ s'obtient facilement à partir de la factorisation $(b - x^2)x = c$.

[14]cf. [28], pp. 65–66. Faulhaber oppose le procédé de Johann Jung (« Johann Jungen Invention welche Nicolaus Raimarus verbessern will ») à sa propre méthode de résolution algébrique dans [11], chap. 44, p. 70.

pour la recherche des solutions entières, généralisable aux équations de degré plus élevés, et reposant sur un critère de divisibilité : ainsi dans la deuxième équation ci-dessus, toute solution x entière divise nécessairement c et $(b + \frac{c}{x})$. Roth ne parle pas de ce procédé.

2.2 Changements de variable

Pour ramener les formes quadrinômes et les formes trinômes contenant un terme en x^2 aux trois premières formes canoniques, Roth a recours à un changement de variable, que l'on verra ressurgir dans l'œuvre plus tardive de Faulhaber, de la forme $x = y - \frac{b}{3}$ (où b est le coefficient du terme en x^2 ; le signe variant suivant la forme canonique envisagée). Pour les formes canoniques $x^3 + ax^2 = c$ et $x^3 + c = ax^2$, il propose, comme alternative, deux autres changements de variables, plus simples dans ces deux cas, de formes respectives $x = y^2 - a$ et $x = \frac{(\sqrt[3]{c})^2}{y}$.

2.3 Trois règles de Stifel

Bien que les problèmes traités dans l'*Arithmetica Philosophica* conduisent en général à des solutions rationnelles, Roth utilise parfois les formules de Cardan. Ces formules contenant deux radicaux cubiques, il applique ensuite trois règles, attribuées à Michael Stifel, indiquant comment simplifier les radicaux cubiques[15]. Ces trois règles portent sur des radicaux des formes suivantes :
- règle 1 : $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$, $\sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$
- règle 2 : $\sqrt[3]{\sqrt{a} + b}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a} - b}$
- règle 3 : $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$

Ainsi, la première règle enseigne que lorsque $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = p + \sqrt{q}$, q est un diviseur de b, tel que $\frac{b}{q}$ et $(\sqrt[3]{a^2 - b} + q)$ soient des carrés. Alors $p = \sqrt{\sqrt[3]{a^2 - b} + q}$.
La troisième règle enseigne que lorsque $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$, q est un diviseur de b, tel que $\frac{b}{q}$ soit un carré et que $\sqrt[3]{a - b} + q$ soit rationnel. Alors $p = \sqrt[3]{a - b} + q$.
En fait ces règles ne peuvent s'appliquer que lorsque les deux termes du binôme (ainsi $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ dans la troisième règle) sont vraiment incommensurables l'un par rapport à l'autre. A titre d'exemple, démontrons la règle 3 :

Démonstration de la règle 3. Si $\sqrt[3]{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$, en mettant au cube on obtient $\sqrt{a} + \sqrt{b} = p\sqrt{p} + 3p\sqrt{q} + 3q\sqrt{p} + q\sqrt{q}$. Si l'on suppose alors les termes $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ incommensurables entre eux, on a (les lettres p et q étant interchangeables) :

$$\sqrt{a} = p\sqrt{p} + 3q\sqrt{p}$$
$$\sqrt{b} = q\sqrt{q} + 3p\sqrt{q}$$

[15]cf. [15], pp. 22–24, pour un exposé de ces règles telles qu'elles figurent dans l'*Arithmetica Integra* de Stifel (1544).

D'où en mettant au carré :

$$a = (p + 3q)^2 p$$
$$b = (q + 3p)^2 q$$

d'où $a - b = (p - q)^3$ et $\sqrt[3]{a - b} + q = p$. D'où la formule ci-dessus, et les conditions nécessaires que q divise b et que $\frac{b}{q}$ soit un carré. □

Dans ces trois règles, on peut procéder aussi bien avec des rationnels que des entiers, mais Roth s'efforce toujours d'éviter les fractions.

2.4 Relations entre les racines

Roth expose des procédés pour trouver les autres racines lorsque l'on en connaît déjà une, au moyen des coefficients de l'équation. Par exemple, pour la forme canonique $x^3 + c = bx$, si x_1 est la racine négative, les deux racines positives sont $-\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{b - 3(\frac{x_1}{2})^2}$.

L'exposé de Roth a le mérite de l'exhaustivité. Les méthodes que l'on vient d'exposer lui suffisent pour résoudre tous les problèmes cubiques parmi les 160 problèmes posés par Faulhaber. Il cite l'*Ars Magna* de Cardan avec précision. D'autre part, il est intéressant de constater les choix différents faits par Roth et par Descartes (dans la *Géométrie*, 1637) pour contourner le même obstacle : le cas irréductible de l'équation cubique. Les deux auteurs enseignent en effet comment ramener toute équation cubique à l'une des trois premières formes canoniques, et renvoient pour sa solution aux formules de Cardan, sauf dans le cas irréductible[16]. Le moyen proposé par Descartes pour contourner l'obstacle est alors un moyen géométrique : la trisection de l'angle. Ainsi, pour les formes canoniques $z^3 = pz + q$ et $z^3 = pz - q$, lorsque $\frac{q^2}{4} \leq \frac{p^3}{27}$, Descartes ramène le problème à la trisection de l'angle sous-tendu par une corde de longueur $\frac{3q}{p}$ dans un cercle de rayon $\sqrt{\frac{p}{3}}$. Insistant sur le fait que, de son point de vue (le point du vue du géomètre, ici), ce procédé n'est pas moins légitime que l'utilisation des formules de Cardan, il propose même d'introduire une nouvelle notation algébrique pour le désigner : « quelque chiffre particulier, pour exprimer les subtendues (du tiers d'un angle), ainsi qu'on fait du chiffre $\sqrt{C}$ »[17]. Roth

[16]cf. la *Géométrie*, [7], vol. VI, p. 471.

[17]cf. [7], vol. VI, p. 474. A l'occasion de ce rapprochement avec l'œuvre de Descartes, il convient de mentionner l'attention portée par Kenneth L. Manders à la remarque suivante, faite par un disciple de Faulhaber, Johannes Remmelin (1583–1632), dans un ouvrage publié en 1621 : « l'auteur [Faulhaber] a encore beaucoup d'autres secrets [...] en particulier quatre nouveaux compas proportionnels, dont l'un permet de trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes. Comment d'autre part diviser tout arc de cercle en trois parties égales géométriquement. Comment de même réaliser toutes les sections coniques et cylindriques au sujet desquelles d'autres auteurs ont écrit de gros livres. D'autre part il sait aussi démontrer, à partir du nombre 666, une Règle Générale pour une infinité de Coß [...] » (cf. [21], p. 2). Je n'ai trouvé aucune autre trace de travaux sur les sections coniques dans les ouvrages de Faulhaber que j'ai consultés. D'autre part, la comparaison faite par Manders avec les compas décrits par Descartes dans ses *Cogitationes Privatae* souffre du fait que dans cette citation, les compas ne sont pas décrits comme des instruments permettant de résoudre des équations (comme ils

propose au contraire un procédé numérique, qui laisse pressentir le lien étroit entre algèbre et arithmétique dans l'œuvre des *Rechenmeister*, et qui repose sur le fait que ceux-ci s'intéressent avant tout aux solutions entières, ou au moins rationnelles. On va voir à présent comment le lien entre ces deux disciplines se manifeste aussi dans le choix des 160 problèmes proposés par Faulhaber.

3 Thèmes représentés dans les 160 problèmes du *Cubicossischer Lustgarten*

3.1 Les problèmes traditionnels de la *Rechenkunst*

Parmi les 160 énoncés de problèmes du *Cubicossischer Lustgarten*, de nombreux sont déguisés sous forme de problèmes pratiques. On y trouve surtout des problèmes commerciaux, dont l'énoncé fait intervenir des crédits (par exemple le problème III), des intérêts composés (LXXXVIII), des parts de capital dans une société (CXIV), des salaires (I). La traduction de ces énoncés sous forme algébrique requiert tout d'abord le choix d'une ou plusieurs inconnues, puis une application (ou plusieurs) de la « règle de trois ». Roth est alors conduit à une équation. Le coeur du problème est la résolution de cette équation. Les solutions sont en général rationnelles. Parfois Roth utilise les formules de Cardan pour résoudre l'équation, et doit donc traduire la solution sous forme rationnelle au moyen des trois règles de Stifel (par exemple, problème XCV). Parfois, il utilise son procédé numérique pour obtenir des solutions entières (ainsi dans le problème CXIV, où l'équation cubique obtenue appartient au cas irréductible).

Je ne donne ici que deux exemples, pour mettre en lumière l'utilisation de la règle de trois (une des nombreuses « règles » dont font état les Rechenbücher, à côté de la *regula falsi*, de la *regula alligationis*, etc.) et de la théorie des proportions dans la traduction des énoncés sous forme algébrique[18].

> <u>Problème CXIV</u> (cf. [27], p. 117v). Trois personnes forment une société. Ils placent ensemble 880 florins. A reste dans cette société pendant 8 mois, B pendant 6 mois, C pendant 5 mois. Ils gagnent au total 265 florins. Le capital placé et le gain de A s'élèvent à un total de 280 florins. Ceux de B à 390 florins. Ceux de C à 475 florins. Combien chacun avait-il placé, et combien chacun a-t-il gagné ?

le sont dans les *Cogitationes*), mais seulement comme des instruments de géométrie. La « Règle Générale pour une infinité de Coß » mentionnée ensuite par Remmelin est au contraire, on le verra ci-dessous, une méthode purement algébrique, proposée par Faulhaber en 1622 dans [11], pour résoudre les équations de tous degrés. Enfin, l'étude des compas par les géomètres et les algébristes arabes (cf. [25]), longtemps avant Descartes, rend inacceptable la remarque suivante de Manders : « the conic and cylindrical section compasses lack the degree of mathematical or practical interest which might otherwise account for independant discovery, or even for their retention in the set if its transmission from Descartes to Faulhaber was substantially indirect » .

[18] L'importance de la règle de trois et de la théorie des proportions comme « trait d'union » entre arithmétique pratique et algèbre en Allemagne aux XV^{e} et XVI^{e} siècles est soulignée par Wolfgang Kaunzner dans [18], p. 164 et 166.

Réponse : A avait placé 200 florins, B 300 florins et C 380 florins.
A a gagné 80, B 90 et C 95 florins.

Roth commence par simplifier l'énoncé en divisant toutes les quantités par 5. Ainsi capitaux et gains s'élèvent à : 56 pour A, 78 pour B, 95 pour C. Le gain total est 53. Il choisit comme inconnue le gain de A après 8 mois (je note cette inconnue x ci-dessous). Une première application de la règle de trois lui permet d'établir le gain de A après les 6 premiers mois[19] :

$$\begin{array}{ccc} 8 \text{ mois} & x & 6 \text{ mois} \\ & \frac{3}{4}x & \end{array}$$

Le capital de A est alors : $56 - x + \frac{3}{4}x = 56 - \frac{1}{4}x$. Une deuxième application de la règle de trois lui permet d'établir le gain de B après les 6 premiers mois :

$$\begin{array}{ccc} 56 - \frac{1}{4}x & \frac{3}{4}x & 78 \\ & \frac{234x}{224-x} & \end{array}$$

Deux autres applications de la règle de trois lui permettent de même d'établir le gain de C après les 5 premiers mois :

$$\begin{array}{ccc} 8 \text{ mois} & x & 5 \text{ mois} \\ & \frac{5}{8}x & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 56 - \frac{3}{8}x & \frac{5}{8} & 95 \\ & \frac{475x}{448-3x} & \end{array}$$

En égalant le total des trois gains à 53 florins, il obtient une équation cubique, appartenant au cas irréductible :

$$311584x - 2297x^2 + 3x^3 = 5318656 - 59360x + 159x^2$$

Il trouve une solution entière, $x = 16$, par le procédé numérique. □

Problème LXXXVIII (p. 96v). Quelqu'un fait un emprunt de 1000 florins sur 3 ans, avec des intérêts composés. Si l'on multiplie les intérêts de la première année par les intérêts composés de la deuxième année, et que l'on multiplie ce produit par les intérêts composés de la troisième année, on obtient $144703\frac{1}{8}$ florins. Quels étaient les intérêts de la première année, pour ces 1000 florins ? Réponse : 50 florins.

Roth remarque d'abord que dans les problèmes d'intérêts composés, les intérêts successifs « croissent chaque fois proportionnellement ». Il énonce ensuite, verbalement, pour trois termes proportionnels, une formule que l'on écrirait :

$$\sqrt[3]{a \times ab \times ab^2} = ab$$

[19]La règle de trois exprime que si $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, alors $d = c \times \frac{b}{a}$. Roth dispose alors ces termes sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ & c \times \frac{b}{a} & \end{array}$$

Il en déduit immédiatement que les intérêts composés de la deuxième année sont $\sqrt[3]{144703\frac{1}{8}} = 52\frac{1}{2}$. Il choisit alors pour inconnue x les intérêts de la première année, et applique la règle de trois pour en déduire les intérêts composés de la deuxième année en fonction de x :

$$\begin{array}{ccc} 1000 & x & 1000 + x \\ & \frac{1000x+x^2}{1000} & \end{array}$$

D'où l'équation :

$$52\frac{1}{2} = \frac{1000x + x^2}{1000}$$

qui a bien pour solution $x = 50$. $\square$

3.2 Arithmétique théorique

Un nombre important de problèmes font intervenir des nombres figurés[20]. Les problèmes VIII, IX, XXIII, XCVI à CXIII, CLVII et CLVIII portent spécifiquement sur les nombres polygonaux, et les problèmes CXXI à CXLVI, CLI à CLVII, et CLIX sur les nombres pyramidaux. Dans le problème VIII, Roth donne la formule suivante pour calculer un nombre polygonal à d arêtes de longueur x :

$$\begin{array}{rcl} O_d(x) & = & (\text{« premier terme »} + \text{« dernier terme »})\frac{x}{2} \\ & = & [1 + (x(d-2) - d + 3)]\,\frac{x}{2} \end{array}$$

Le nombre polygonal $O_d(x)$ s'obtient ainsi comme somme d'une série arithmétique de raison $(d-2)$, dont le premier et le dernier terme sont respectivement 1 et $(x(d-2) - d + 3)$ (dans la représentation géométrique du nombre polygonal, les termes de cette série correspondent à des « gnomons » ajoutés successivement à l'unité). De même, dans le problème CXXI, il donne une formule pour les nombres pyramidaux de paramètres d, x :

$$\sum_{k=1}^{x} O_d(k) = \frac{2 + (x(d-2) - d + 3)}{3} \cdot \frac{x(x+1)}{2}$$

Il donne ensuite une table de ces expressions algébriques[21], pour les valeurs de d de 3 à 100, accompagnée chacune du nom du nombre pyramidal en question, formé à partir de racines grecques (par exemple les nombres $O_{14}(x)$ sont dits « tétradécagonaux »). Le dernier terme de la série arithmétique servant à former un nombre polygonal, $(x(d-2) - d + 3)$, est appelé « racine d-gonale » (ainsi « racine tétradécagonale » pour $d = 14$). Le paramètre x est appelé « racine carrée » du nombre polygonal (« quadrat Wurtzel »).

Chacun de ces problèmes consiste en une équation faisant intervenir plusieurs

[20] Pour plus de détail sur les nombres figurés chez Faulhaber, cf. Schneider [28], p. 72–80 et 109–122.

[21] cf. [27], p. 126r–129v.

nombres polygonaux et pyramidaux dont les paramètres (nombre d'arêtes, longueur d'une arête) présentent certaines relations mutuelles. Ainsi le CLVI consiste en l'équation :

$$\left(\sum O_{20}(x+9) - \sum O_{20}(x)\right) \times (O_3(x+9) - O_3(x)) = 1555281$$

Quelques autres problèmes attirent l'attention du lecteur sur des sujets variés d'arithmétique entière. Les problèmes VI et CXVIII portent sur les nombres « proniques », de la forme $x(x+1)$ (un nombre pronique est le double d'un nombre triangulaire). Les problèmes LXIII et LXXI présentent des exemples de triangles numériques : le LXIII porte sur le triangle (15,20,25), et le LXXI sur le triangle (13,14,15), qui a la particularité d'avoir une de ses hauteurs, et donc son aire, entière. Les problèmes CXII, CXIII et CLX proposent de chercher les deux paramètres d et x entiers d'un nombre polygonal donné N. Il s'agit donc de trouver une solution entière (d, x) de l'équation $O_d(x) = N$. Roth n'explique pas comment trouver cette solution, il indique seulement qu'il a utilisé des « tables » à cet effet. Il dit qu'il apprécie particulièrement les « tables » utilisées par Johann Jung. Il s'agissait peut-être de tables permettant la décomposition du nombre N en facteurs premiers[22]. Comme je l'ai mentionné plus haut, un procédé pour trouver les solutions entières d'une équation cubique à une inconnue, reposant sur un critère de divisibilité, est aussi attribué à Johann Jung. Enfin, les problèmes CXLVII à CXLIX portent sur les sommes des séries de puissances $\sum x^2$ et $\sum x^3$. Roth renvoie en particulier, pour la formule $\sum x^3 = (\sum x)^2$, aux travaux de ses prédécesseurs Simon Jacob et Michael Stifel. On verra que cette formule a joué un rôle dans l'œuvre plus tardive de Faulhaber.

Le problème CXX demande la construction d'un carré magique 15×15. Il s'agit là d'un sujet classique, abordé par exemple par Stifel dans son *Arithmetica Integra*[23].

Quelques problèmes renvoient aussi spécifiquement à l'étude des irrationnelles, tel le problème LXVI : il s'agit de retrouver N dans l'équation $x^3 = 12x^2 - N$, sachant que la racine x est un « binôme » ou « résidu », dont la partie rationnelle est 5 (c'est-à-dire que x est de la forme $5 \pm \sqrt{b}$). Ce problème, avec les mêmes données numériques, était dans l'*Ars Magna* de Cardan[24].

3.3 Des problèmes d'algèbre à plusieurs inconnues

Un grand nombre de problèmes du *Cubiccossischer Lustgarten* font intervenir deux inconnues, voire plus. L'énoncé de ces problèmes renvoie souvent directement à leur nature algébrique : ainsi des problèmes à deux inconnues qui commencent par « Es seynd zwo Zahlen » (« soient deux nombres... »), puis formulent une ou plusieurs conditions entre ces nombres. Parfois, l'une des conditions est donnée par le fait que les inconnues ont pour somme un nombre

[22] N vaut, dans chacun des trois problèmes mentionnés, respectivement, 7^7, 41^5, 19^{11} ; une fois ces décompositions en facteurs premiers effectuées, le problème se résout facilement.

[23] cf. l'exposé détaillé de Hofmann, [15], p. 13–16.

[24] cf. [4], chap. VI, § 2, p. 15r-15v.

donné : « mach auß 10 drey Theil » (« fais trois parties de 10... »). Parfois aussi, les inconnues doivent former une suite géométrique : « es seynd 4 Zahlen continuè proportionales » (« soient 4 nombres continuellement proportionnels... »).

Les problèmes posés par Cardan dans le chapitre X de l'*Ars Magna* ont pu servir de modèles à Faulhaber : ainsi parmi les premiers problèmes de ce type dans le *Cubicossischer Lustgarten*, les problèmes XXXII, XXXIII, XXXIV sont identiques aux *quaestiones* II, III, IV du chapitre X de l' *Ars Magna* ([4], p. 29r).

Pour résoudre tous ces problèmes, Roth pose plusieurs inconnues symboliques. Il note l'une d'elles par les symboles cossiques (je la noterai ci-dessous par x), et les autres par des majuscules latines A, B, C, etc. Dans les problèmes à deux inconnues, Roth pose souvent la première égale à $x + A$, et la deuxième égale à $x - A$, choix judicieux pour les problèmes dont l'équation résultant de l'élimination d'une inconnue est de degré 2 et conduit donc à une solution irrationnelle de la forme $a \pm \sqrt{b}$. Lorsque un problème demande de partager un nombre N en trois parties, Roth pose souvent ces trois parties respectivement égales à x, A, $N - x - A$.

Dans le chapitre X de l'*Ars Magna*, Cardan distingue plusieurs formes canoniques d'équations à deux inconnues, de degré 2 :

$$\begin{aligned}
&x^2 = ax + by \\
&ax = x^2 + by \\
&by = ax + x^2 \\
\\
&xy = ax + by \\
&ax = xy + by \\
\\
&x^2 = ax + cxy \\
&xy = ax + cx^2 \\
&ax = bxy + x^2 \\
\\
&x^2 = axy + by \\
&xy = ay + bx^2 \\
&by = ax^2 + xy
\end{aligned}$$

De plus, pour chacune de ces formes, il suppose donné un des trois termes monômes qu'elle contient (ainsi, pour l'équation $x^2 = ax + cxy$, il suppose alternativement comme donné x^2, x, xy). Il donne ensuite, par une formule, la valeur de chacune des inconnues en fonction des coefficients et de la donnée supplémentaire. Cela suppose en fait l'élimination d'une des deux inconnues au sein d'un système de deux équations. Ainsi, pour l'équation $x^2 = ax + cxy$, lorsque xy est donné, il s'agit d'éliminer x ou y dans le système

$$\begin{cases} x^2 = ax + cxy \\ xy = d \end{cases}$$

Dans les huit premières formes canoniques[25], l'équation résultante est au plus de degré deux. Cardan « démontre » alors les formules qu'il énonce, à la manière

[25] cf. [4], chap. X, § 1–8, p. 23r–26r.

dont les algébristes arabes démontraient les formules de résolution de l'équation de second degré à une inconnue, par « application d'aires ». Mais dans les trois dernières formes canoniques[26], l'équation résultante peut être du troisième degré. Dans ce cas, Cardan ne donne pas la formule (qui est parfois inutilisable, à cause du « cas irréductible »). Il donne directement l'équation résultante.

Roth reproche à Cardan la facture théorique compliquée de ce chapitre :

> Sur cet exemple, et sur d'autres exemples avec les mêmes inconnues, Cardano a écrit, dans le dixième chapitre de son dixième livre, de nombreuses règles très difficiles et inintelligibles. Mais je veux te montrer ici, le mieux possible, que tous ces procédés peuvent s'accomplir au moyen de l'unique règle de trois, non seulement plaisamment et joliment, mais aussi de manière courte et judicieuse.[27]

C'est certainement aux « démonstrations » de Cardan que Roth adresse ce reproche. D'une part, Cardan ne proposait qu'une seule démonstration pour chaque forme canonique (quelque soit la donnée supplémentaire formant la deuxième équation du système). Le lien entre la formule énoncée et sa démonstration n'était donc pas toujours très clair[28]. D'autre part, Roth n'utilise pas l'« application d'aires »[29]. Cette préférence apportée à la règle de trois est la manifestation d'une influence réciproque entre *Rechenkunst* (arithmétique pratique) et algèbre cossiste : la règle de trois, outil de la *Rechenkunst*, remplace la démonstration géométrique de l'algébriste italien Cardan.
Je transcris ci-dessous deux exemples de problèmes à deux inconnues : le problème LXX (qui contient la critique à Cardan), et le problème LXXV (qui contient une équation à deux inconnues de degré 3, forme canonique absente du chapitre X de l'*Ars Magna*).

> <u>Problème LXX</u> (p. 85r). Soit un exemple cossique conduisant à ces équations[30] :
>
> $$\begin{aligned} &x^2 = 2xA + 3A \\ &xA = 8 \end{aligned}$$
>
> Quelles sont les valeurs de x et A ? Réponse : $x = 1 + \sqrt{13}$ et $A = \sqrt{5\frac{7}{9}} - \frac{2}{3}$.

Roth applique une première fois la règle de trois :

$$\begin{array}{ccc} xA & 8 & 2xA \\ & 16 & \end{array}$$

[26]cf. [4], chap. X, § 9–11, p. 26r–28r.

[27]cf. [27], p. 85r.

[28]Ainsi dans le cas de $x^2 = axy + by$, lorsque la donnée supplémentaire est xy. Le problème LXX est d'ailleurs identique à l'un des exemples numérique donné par Cardan pour cette forme canonique.

[29]Sauf dans l'unique problème XVIII, où il propose une première solution par application d'aires, conduisant à une solution irrationnelle compliquée, puis une deuxième solution, sans application d'aires, conduisant à la même solution, mais sous une forme plus simple.

[30]Dans l'énoncé, Faulhaber note ces équations sous la forme : « 1z aequat. : 2 rad. A pl. 3 A. Facit 1 rad. A thut allhie 8 » .

Il obtient $2xA = 16$. Il applique une deuxième fois cette règle :

$$\begin{array}{ccc} xA & 8 & 3A \\ & \frac{24}{x} & \end{array}$$

et obtient ainsi $3A = \frac{24}{x}$. D'où, en reportant ces valeurs dans la première équation de l'énoncé :

$$x^2 = \frac{24}{x} + 16$$

et finalement :

$$x^3 = 24 + 16x$$

Roth résout l'équation et trouve x, puis cherche la valeur de A en remplaçant x par sa valeur dans l'équation $xA = 8$. □

> Problème LXXV (p. 88r). Cherche deux nombres, tels que lorsque le produit de leur différence par la différence de leur carrés soit 792, et que le produit de leur somme par la somme de leurs carrés soit 5720. Réponse : le plus grand est 14 et le plus petit 8.

Roth note ces deux nombres $A+x$ et $A-x$. En développant les produits décrits dans l'énoncé, il est conduit au système :

$$\begin{array}{l} 8x^2A = 792 \\ A^3 + x^2A = 1430 \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} x^2A = 99 \\ A^3 + x^2A = 1430 \end{array}$$

Roth écrit alors : « de ces deux équations, fais-en une seule, en les soustrayant ». D'où l'équation : $A^3 = 1331$, qui conduit directement à la solution. □

Les 160 problèmes du *Cubicossischer Lustgarten* s'organisent donc autour de trois axes disciplinaires :
- un axe spécifiquement algébrique, centré sur la résolution des équations cubiques, mais incluant quelques exemples d'équations de degrés supérieurs[31], et aussi de nombreux exemples de systèmes d'équations à deux inconnues ou plus ;
- un rapport mutuel de l'algèbre à la *Rechenkunst*, qui se manifeste non seulement à travers le déguisement de problèmes algébriques sous forme d'énoncés de portée pratique (problèmes commerciaux, problèmes d'alliages, etc.), mais aussi à travers l'usage universel de la règle de trois ;
- un axe arithmétique, double : l'arithmétique entière, d'une part, fournit un grand nombre d'énoncés de problèmes, en particulier autour des nombres figurés, mais reste à un niveau élémentaire et ne sert que de prétexte à des énoncés

[31] Ainsi les problèmes X, LXV, XCIII, XCIV, CLVII, CLVIII, CLX contiennent des équations de degrés 4 et 5. On reviendra plus loin sur la méthode proposée par Roth pour résoudre les équations de degré 4. Pour le degré 5, le problème CLX présente un exemple non trivial. L'équation en question étant à coefficients entiers, Roth est parvenu à trouver un facteur quadratique à coefficients entiers, mais il n'explique pas comment.

en fait algébriques[32] ; d'autre part, l'étude des irrationnelles, en particulier les trois règles de Stifel, est rendu nécessaire pour simplifier la forme des solutions[33].

Dans l'œuvre tardive de Faulhaber étudiée ci-après, le rapport entre arithmétique et algèbre va devenir prédominant.

4 L'œuvre algébrique de Faulhaber

Revenons à la courte citation faite au début de cet article, les « Conseils rapides pour apprendre le Coß », donnés par Faulhaber en 1631 dans son *Academia Algebrae*. Nous nous étions arrêtés au « Cubiccoß », et au récit de la confrontation avec Peter Roth. Faulhaber continue :

> Après cela, l'on peut maintenant apprendre le Zenßdezenßcoß, et d'autres équations plus élevées de Coß différents ; ce que j'enseigne au moyen d'une voie générale dans mes *Arithmetica Miracula*, et que j'explique avec des exemples réguliers. Une fois que l'on a compris cette *Arithmetica miracula*, ainsi que d'autres écrits semblables, alors finalement l'on peut passer à cette *Academia Algebrae*, et y étudier le Procédé Général selon lequel doit être formée une infinité d'*exempla* de tous les Coß successifs ; tant qu'aucun mortel ne peut achever de les apprendre dans cette vie ; tant qu'il ne reste que Dieu, l'artisan le plus haut, qui les connaisse complètement. C'est aussi pour cela que je veux conduire le lecteur bénévole à cette Academia Algebraica, afin que, lorsqu'il aura tout compris suffisamment, il finisse pourtant par reconnaître avec moi que cette connaissance n'est qu'un recueil fragmentaire et que nous tous, hommes, dans cet art nous devons encore rester des écoliers, jusque dans notre cercueil, car plus l'on invente, plus il y a à apprendre, et plus à découvrir. Mais là-bas, dans cette vie-là, dans la véritable Académie céleste, nous parviendrons à une connaissance complète de cet art et d'autres arts. Que Dieu le Père, le Fils et le Saint Esprit nous aide. Amen.[34]

Faulhaber explique ici le rapport entre ses deux traités d'algèbre les plus importants : dans les *Miracula Arithmetica*, il prétend enseigner une méthode « générale » pour résoudre les équations algébriques de degré quelconque ; dans l'*Academia Algebrae*, il s'agit de donner à l'algèbre un champ d'application

[32] Pour les nombres polygonaux par exemple, la seule propriété arithmétique que devait connaître le lecteur pour résoudre les problèmes en question, est la représentation algébrique de ces nombres (que Roth obtient comme somme d'une série arithmétique dans le problème VIII). De même pour les nombres pyramidaux. Un autre exemple : le problème LXIII a pour solution un triplet pythagoricien (15,20,25), mais n'a en fait aucun intérêt arithmétique. En voici l'énoncé : « Soit un triangle orthogonal ABC. Soit AD une des hauteurs. On suppose que AB+BD vaut 36 et que AC+CD vaut 24. Question : que valent les segments AB, BD, DC, CA, AD, ainsi que l'aire du triangle ? » . Il s'agit simplement d'une application du théorème de Pythagore, conduisant à une équation quadratique en l'inconnue BD.

[33] L'étude des irrationnelles apparaît aussi dans un cadre différent avec les problèmes LXVI (voir ci-dessus), LXVII, et CXIX.

[34] « Kurtz Bedencken von der Coß zu lehrnen » , faisant suite à la préface de [12], et cité intégralement par Kästner, [17], vol. III, p. 143–144.

élargi, en proposant des exemples de problèmes conduisant à des équations de degré aussi élevé qu'on le désire.

4.1 Les *Miracula Arithmetica* : une méthode « générale et régulière » pour résoudre les équations de degré supérieur à 4.

Ce traité contient 50 « chapitres ». Les 30 premiers exposent et « démontrent » empiriquement une formule de récurrence sur les sommes itérées de puissances[35] :

$$^{i+1}\sum n^k = \frac{n\left(^i\sum n^k\right) - ^i\sum n^{k+1}}{i} + ^i\sum n^k$$

Les chapitres 31 à 35 fournissent diverses propriétés des nombres icosaédraux, dodécaédraux[36], et « pyrgoïdaux »[37], et donne le calcul des différences d'ordre quelconque de ces suites de nombres, et de leurs sommes itérées. Faulhaber utilise pour cela une formule que l'on pourrait écrire :

$$O(n) = a\begin{pmatrix} n+1 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + n$$

où n est la longueur de l'arête, $O(n)$ le nombre polyédral. Les sommes itérées se déduisent alors aisément de la formule $\sum\limits_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$.
C'est au chapitre 36 que commence l'exposition de la « méthode générale » de résolution algébrique. Faulhaber se propose d'abord de représenter le nombre 666 (« heilige Zahl », nombre sacré) comme nombre polygonal. Il doit pour cela résoudre une équation quadratique de la forme $x^2 + bx = c$. Au moyen du

[35] On notera dans la suite :

$$^i\sum a_n = \sum_{k_i=1}^{n} \dots \sum_{k_1=1}^{k_2} a_{k_1}$$

La formule de récurrence énoncée est un cas particulier de la formule suivante, que l'on peut démontrer par récurrence sur $(n+i)$:

$$^{i+1}\sum a_n = \frac{(n+i)\left(^i\sum a_n\right) - ^i\sum n a_n}{i}$$

[36] Les nombres icosaédraux et dodécaédraux envisagés par Faulhaber sont des nombres figurés construits par « gnomons », bien que Faulhaber ne décrive pas explicitement ce procédé de construction. C'est la même conception des nombres polyédraux que l'on trouve dans le *Progymnasta de solidorum elementis* de Descartes (cf. [8]). D'autres auteurs utilisent une conception légèrement différente des nombres polyédraux (Maurolico).

[37] Les nombres pyrgoïdaux sont des nombres polyédraux que l'on peut se représenter sous la forme d'un prisme surmonté d'une pyramide.

changement de variable $x = y - \frac{b}{2}$, il se ramène à une équation de la forme $y^2 = c$. Au chapitre 37, il cherche à représenter 666 comme nombre polyédral, d'où une équation cubique cette fois. Au moyen d'un changement de variable $x = y - \frac{b}{3}$, il se ramène à une équation cubique sans terme en y^2, dont il donne immédiatement une solution (sans plus expliquer). Il remarque :

> Certes Cardan et Peter Roth ont déjà montré comment résoudre le Cubiccoß : c'est aussi ce qui provient de mon Cubiccossischer Lustgarten. Mais ils ne l'ont pas tiré de la source inépuisable du nombre 666. Ainsi, ils ont séparé le Cubiccoß en 13 règles différentes. C'est pourquoi la découverte du procédé général leur est restée cachée.[38]

Ne laissons pas notre regard s'obscurcir par la spéculation théologique sur le nombre 666. Faulhaber entend bien substituer un procédé unique de résolution à la multiplicité des règles correspondant aux diverses formes canoniques. Certes Peter Roth utilisait déjà le changement de variable $x = y - \frac{b}{3}$ pour ramener les formes canoniques quadrinômes aux trois premières formes trinômes. Mais Faulhaber ne s'arrête pas au « Cubiccoß ». Dans les chapitres 38 et 39, il utilise de même les changements de variables $x = y - \frac{b}{4}$, $x = y - \frac{b}{5}$, $x = y - \frac{b}{6}$, $x = y - \frac{b}{10}$ pour supprimer les termes en x^3, x^4, x^5, x^9 dans des équations de degrés respectifs 4, 5, 6, 10. Pour chacune, il donne la solution immédiatement après, sans plus expliquer comment il l'obtient.

Il désigne le procédé de changement de variable par le terme de « transfert » (Transferierung). Comme ce procédé fait intervenir le développement de binômes de la forme $(y - \frac{b}{n})^t$, il fournit à cette occasion une table contenant les coefficients binômiaux jusqu'à $t = 7$ (chapitre 36). Enfin, il remarque que les rares problèmes de degré 4 énoncés dans son *Cubicossischer Lustgarten* ne contiennent pas de terme en x^3, et suggère que Peter Roth n'aurait pas su les résoudre, le cas échéant !

Dans le chapitre 40, Faulhaber énonce la règle (dite aujourd'hui « de Descartes ») déterminant le nombre de racines négatives ou positives d'une équation au moyen du nombre d'alternances des signes des coefficients successifs. Indiquons seulement un exemple :

$$\begin{array}{ccccccc} & (0) & (0) & (1) & (2) & (3) & (0) \\ x^{10} = & -5x^9 & -\frac{15}{2}x^8 & +7x^6 & -5x^4 & +\frac{3}{2}x^2 & +15743049850 \end{array}$$

Les nombres parenthésés indiquent le nombre d'alternances des signes, en partant de la gauche. Cette équation a donc au plus 3 racines positives, et 7 négatives.

Au chapitre 41, il explique comment, une racine a étant connue, l'on peut déterminer les autres racines en divisant l'équation par le binôme linéaire $(x - a)$; et réciproquement, comment obtenir une équation en multipliant les binômes linéaires correspondant à toutes ses racines[39].

Dans les chapitres 42 et 43, Faulhaber revient enfin sur la résolution d'une des

[38] cf. [11], p. 46.

[39] Selon Ivo Schneider (cf. [28], p. 98), il pourrait s'agir aussi bien d'une découverte indépendante que d'une reprise des résultats de Viète sur ce sujet. D'autre part, à la fin de

équations de degré 4 dont il a expliqué le « Transferierung » dans le chapitre 38. Il fournit à cette occasion une méthode de résolution algébrique des équations de degré 4, identique à celle que l'on retrouve en 1637 dans la *Géométrie* de Descartes. Nous allons la comparer à la méthode utilisée par Peter Roth pour résoudre les quelques problèmes de degré 4 qu'il rencontre dans le *Cubicossischer Lustgarten*. Dans la description des deux méthodes, pour rendre l'exposé plus évident, je choisirai des équations à coefficients littéraux, bien que tous les exemples traités par Roth et Faulhaber portent des coefficients numériques.

Méthode de Ferrari-Roth. Soit l'équation $x^4 + bx + c = ax^2$ (ce sont des équations de cette forme que rencontre Roth dans les problèmes X et LXV du *Cubicossischer Lustgarten*). Roth introduit une nouvelle inconnue, que je noterai y (il utilise cependant les mêmes notations, cossiques, que pour l'inconnue x, ce qui rend son exposé difficilement lisible). Il ajoute à chaque membre les termes $2yx^2 + y^2$, ce qui donne l'équation :

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = 2yx^2 + ax^2 - bx + y^2 - c$$

Le membre de gauche est alors identique à un carré $(x^2 + y)^2$. Pour faire de même à droite, Roth demande de faire « trois parts proportionnelles » avec les termes du membre de droite :

$$2yx^2 + ax^2, \quad \tfrac{-bx}{2}, \quad y^2 - c$$

Le produit des extrêmes doit être rendu égal au terme moyen. Cela conduit à l'équation :

$$(2y + a)(y^2 - c) = \left(\frac{-b}{2}\right)^2$$

Il s'agit d'une équation cubique en y. Roth cherche ses trois racines. Pour chacune de ses racines y_i, il remarque que l'équation initiale peut s'écrire :

$$(x^2 + y_i)^2 = (x\sqrt{2y_i + a} - \sqrt{y_i^2 - c})^2$$

---

ce 41[e] chapitre, Faulhaber indique que certaines équations peuvent être résolues au moyen des principes qu'il vient d'énoncer, mais que d'autres requièrent l'utilisation de certaines « tables » . Il ajoute qu'il ne veut pas publier ces tables parce qu'un de ses amis, « Herr Carolus Zolindius (Polybius) » prévoit de les publier bientôt à Venise ou à Paris. Ivo Schneider, Kurt Hawlitschek et Kenneth L. Manders fournissent plusieurs indices visant à identifier ce personnage à Descartes. Voici en effet un extrait de ses *Cogitationes Privatae* de Descartes : « Trésor mathématique de Polybe le Cosmopolite. On y donne les vrais moyens de résoudre toutes les difficultés de cette science ; on y démontre que, sur ces difficultés, l'esprit humain ne peut rien trouver de plus ; ceci pour secouer la paresse et condamner la témérité de certains, qui promettent de montrer, dans toutes les sciences, de nouveaux miracles ; et aussi pour alléger les travaux torturants de beaucoup, qui, pris nuit et jour dans certains noeuds gordiens de cette science, consument inutilement l'huile de leur esprit. L'ouvrage est offert de nouveau aux érudits du monde entier, et spécialement aux Frères Rose-Croix, très célèbres en Allemagne. » (cf. [7], vol. X, p. 214 ; je donne ici la traduction de Foucher de Careil). Les circonstances dans lesquelles Descartes a noté ces lignes ne sont pas connues. Cela pourrait faire l'office d'un titre de livre. Si l'on regarde à présent les titres des ouvrages de Faulhaber [10], [11], [12] (ces titres forment une suite), on est tenté de voir dans le texte de Descartes une certaine dérision à l'égard de ces titres. Toutefois, les auteurs mentionnés n'ont donné aucune preuve certaine de l'identification Polybius–Descartes.

Le problème revient donc à résoudre les équations quadratiques[40] :

$$\pm(x^2 + y_i) = x\sqrt{2y_i + a} - \sqrt{y_i^2 - c}$$

Parmi les racines de ces équations, certaines sont identiques. □

Méthode de Faulhaber–Descartes. Partons de la même équation initiale $x^4 + bx + c = ax^2$. Faulhaber introduit trois nouvelles inconnues, que nous noterons y, A, B (comme lui, sauf pour l'inconnue y qu'il note avec les mêmes symboles cossiques que la première inconnue x). Il propose d'identifier cette équation au produit $(-x^2 + xy + A)(x^2 + xy - B)$. Le développement de ce produit est $-x^4 + (y^2 + A + B)x^2 + (yA - yB)x - AB$. En l'identifiant terme à terme avec $-x^4 - bx - c + ax^2$, il obtient les trois équations suivantes :

$$(*) \qquad \begin{cases} y^2 + A + B = a \\ yB - yA = b \\ AB = c \end{cases}$$

On reconnait ici la méthode dite aujourd'hui « méthode des coefficients indéterminés », que l'on attribue souvent à Descartes. Faulhaber résout le système linéaire en A, B formé par les deux premières équations et obtient :

$$\begin{cases} 2B = \frac{b}{y} - y^2 + a \\ 2A = -y^2 + a - \frac{b}{y} \end{cases}$$

Il reporte ces valeurs dans $AB = c$ et obtient ainsi une équation de degré 6 en une seule inconnue y, qui ne contient que des termes carrés, il qu'il résout donc comme une équation cubique, au moyen du changement de variable $z = y^2$. Il reporte la valeur d'une de ses racines dans les expressions de A et B ci-dessus, et obtient ainsi une solution (y, A, B) du système ci-dessus, et donc la factorisation souhaitée $-x^4 + (y^2 + A + B)x^2 + (yA - yB)x - AB = (-x^2 + xy + A)(x^2 + xy - B)$. Le problème revient donc à égaler à zéro un facteur puis l'autre. Faulhaber utilise les mots « *partes aliquotae* » pour désigner ces deux facteurs quadratiques, mettant ainsi à profit un terme appartenant à la tradition arithmétique et désignant les facteurs premiers d'un nombre entier. □

En comparant ces deux méthodes, on comprend l'intérêt apporté par Faulhaber au changement de variable $x = y - \frac{b}{4}$, et sa remarque quant à l'incapacité de Roth de traiter des équations de degré 4 contenant un terme en x^3. Leurs deux méthodes supposent en effet l'absence de terme en x^3. Dans la méthode de Faulhaber, on pourrait certes contourner la difficulté en introduisant une inconnue supplémentaire et en prenant comme « *partes aliquotae* » $(-x^2 + xy + A)$ et $(x^2 + xC - B)$ si l'équation avait un terme en x^3 ; mais la réduite de degré

[40] Roth néglige l'indétermination de signe $\pm$ dans le problème X, mais il la fait apparaître dans le problème LXV. Par contre, dans le problème LXV, il ne considère qu'une seule racine de la réduite en y.

6 obtenue contiendrait alors éventuellement des termes de degrés impairs et ne se ramènerait pas aussi facilement à une équation cubique[41].
Au chapitre 44, couronnement de ce traité, Faulhaber envisage la généralisation de sa méthode de recherche des « partes aliquotae » à des équations de degré plus élevé :

> Par ce procédé, il faut reconnaître que pour des Coß plus élevés, les *partes aliquotae* pourront encore être trouvées, puis résolues de manière régulière, bien qu'une telle chose puisse paraître impossible à la raison humaine ; car le fait que nous, êtres humains mortels, ne puissions résoudre tous les Coß de manière régulière (certes je ne parle pas là de la découverte de Johann Jung que Nicolaus Raimarus a amélioré), cela n'est pas de la faute de l'art, mais plutôt de notre ignorance et de notre faiblesse. Toutefois, si l'on veut procéder de la manière ci-dessus pour des Coß plus élevés, on devra poser y, A, B, C, D et ainsi de suite. Si l'on vient me dire : comment est-ce possible de résoudre de telles équations ? Je répondrai que cet art a beaucoup progressé ces derniers temps en langue allemande, plus qu'en toute autre langue. Qu'on consulte l'écrit de Sutor *Exemplum Arithmeticum.*[42]

Selon Kenneth L. Manders, l'*Exemplum Arithmeticum* contient simplement l'énoncé d'un problème, conduisant à un système de deux équations à deux inconnues que Faulhaber se propose de résoudre[43] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (L_1) & x^7 = -15x^5a^2 - 15x^3a^4 - xa^6 + 6240 \\ (L_2) & 3x^5a^2 = -10x^3a^4 - 3xa^6 + 1008 \end{array} \right.$$

Il faut bien remarquer en effet que toute la difficulté d'une tentative de généralisation de la méthode de recherche des « *partes aliquotae* » tient à deux choses : il faut d'une part savoir résoudre le système $(*)$, c'est-à-dire trouver la réduite en y, et d'autre part, espérer que cette réduite puisse se résoudre plus facilement que l'équation initiale (pour le degré 4, on se ramène à une réduite de degré 3). Faulhaber ne fait pas mention de cette deuxième difficulté. Mais

[41] Il faudrait alors, pour se débarasser des termes de degrés impairs, appliquer justement à la réduite l'opération « Transferierung » .

[42] cf. [11], p. 70.

[43] Pour les puissances de x, Faulhaber utilise les notations cossiques. Pour les puissances de a, il utilise les notations a, aa, aaa, etc. Dans l'*Academia Algebrae*, en 1631, Faulhaber précise que ces deux équations proviennent en fait des deux suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x+a)^6 + (x-a)^6)((x+a) + (x-a)) = 24960 \\ ((x+a)^6 - (x-a)^6)((x+a) - (x-a)) = 8064 \end{array} \right.$$

Cet exemple ressemble beaucoup au problème LXXV du *Cubicossischer Lustgarten* (dont j'ai transcrit la résolution, p. 14) qui commence par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} ((A+x)^2 + (A-x)^2)((A+x) + (A-x)) = 5720 \\ ((A+x)^2 - (A-x)^2)((A+x) - (A-x)) = 792 \end{array} \right.$$

Ce problème semble avoir eu quelque succès : on le retrouve dans le commentaire de Schooten à la *Géométrie* de Descartes (cf. [6], « Commentarii in Librum I » , GGG).

pour la première, il propose sur l'exemple ci-dessus une méthode de résolution des systèmes de plusieurs équations à plusieurs inconnues, qui se veut assez générale. Il procède par étapes, en formant à chaque étape une nouvelle équation comme somme des produits de deux équations antérieures par des monômes :

$$\begin{aligned}
&L_3 = L_1 - 5L_2\\
&L_4 = 3L_3\\
&L_5 = 14L_2 - L_4\\
&L_6 = 5x^2 L_3 - 2a^2 L_5\\
&L_7 = \tfrac{13x^2 L_5 - 5L_6}{32}
\end{aligned}$$

Il se montre satisfait, étant parvenu à l'équation L_7, car, dit-il, il a à présent deux « petites équations », L_5 et L_7, au lieu des deux équations initiales. Bien plus, L_7 permet d'obtenir directement la valeur de a^2 en fonction de x. En substituant cette valeur dans L_5, il obtient une équation en x, qu'il résout, puis reporte la valeur de x obtenue dans l'équation L_5, qui lui donne une équation en a, qu'il résout.

Les derniers chapitres du traité sont moins importants pour notre propos : le chapitre 45 contient une généralisation à l'espace du théorème de Pythagore et de la formule de Héron pour l'aire du triangle[44] ; les chapitres 46 à 50 pré-

[44] *Généralisation du théorème de Pythagore* : si les aires des faces d'un tétraèdre rectangle sont notées A, B, C et D, D étant l'aire de la face opposée à l'angle droit, alors $A^2 + B^2 + C^2 = D^2$.

Quant à la généralisation de la formule de Héron, il s'agit de trouver le volume d'un tétraèdre de côtés donnés. Faulhaber n'énonce pas explicitement la formule, mais prétend la connaître et donne quelques indications, insuffisantes, sur la méthode pour y parvenir. Ivo Schneider tente de reconstituer sa démarche (cf. [28], pp. 125–127.).

Descartes énonce lui aussi la généralisation du théorème de Pythagore et la démontre dans ses *Cogitationes Privatae* ; il propose même de l'étendre à 4 dimensions. Il y énonce aussi une formule de Héron pour les tétraèdres rectangles.

Les exemples numériques choisis par Descartes diffèrent de celui choisi par Faulhaber (celui-ci fait une fois de plus intervenir le nombre 666). Costabel remarque certes que Descartes applique la formule de Héron plane à un exemple numérique extrait de la *Geometria Practica* de Clavius (cf. [5], p. 642 ; remarquons en passant que dans l'article [5], Costabel attribue improprement à Faulhaber l'ouvrage anonyme *Numerus Figuratus, sive Arithmetica Analytica Arte Mirabili Inaudita Nova Constans...* qui est en fait de son disciple Johannes Remmelin, comme le montre Ivo Schneider, [28], p. 113). Mais les notations utilisées par Descartes pour démontrer la généralisation de la formule de Pythagore ne sont pas les notations cossiques utilisées dans le reste de ses *Cogitationes*. Il utilise en effet le signe qq pour le carré de l'inconnue. Comme le remarque Charles Adam (cf. [7], vol. X, p. 247), cette notation figure aussi, conjointement aux notations cossiques, dans l'*Algebra* de Clavius ; je n'ai pas vu la notation qq dans l'œuvre de Faulhaber. Ces passages des *Cogitationes* confirment donc plus l'influence de Clavius dans l'initiation mathématique de Descartes qu'ils ne nous renseignent de manière précise sur l'influence de Faulhaber.

Par contre une transmission de Descartes à Faulhaber n'est pas à exclure ici : le caractère déplacé de ces deux résultats géométriques au sein du traité arithmético-algébrique de Faulhaber renvoie à la possibilité d'une influence extérieure sur celui-ci. S'ils s'étaient rencontrés dans les années 1619–1620, le jeune Descartes pourrait très bien avoir interrogé Faulhaber sur ces résultats. Celui-ci (qui les ignorait peut-être), inspiré par leur élégance, les aurait inclus ensuite dans son traité de 1622.

Il nous faut encore critiquer le rapprochement fait par Kenneth L. Manders entre ces passages des *Cogitationes* et le *Progymnasta de solidorum elementis*. Manders cite un manussentent divers problèmes faisant intervenir des nombres figurés à paramètres non entiers[45].

4.2 L'*Academia Algebrae* : les formules des séries de puissances comme exemples fondamentaux de formules algébriques

L'*Academia Algebrae* a pour objet principal des formules du type :

$$\begin{array}{ll} (1) & \sum n^{2k} = (\sum n^2).P(\sum n) \\ (2) & \sum n^{2k+1} = (\sum n^3).P(\sum n) \end{array}$$

et plus généralement :

$$\begin{array}{ll} (3) & {}^t\sum n^{2k} = ({}^t\sum n^2).P(\frac{n(n+t)}{2}) \\ (4) & {}^t\sum n^{2k+1} = ({}^t\sum n).P(\frac{n(n+t)}{2}) \end{array}$$

où P désigne un polynôme, différent dans chacune des formules ci-dessus. Faulhaber ne démontre pas ces formules. Il commence par poser dix « questions »[46]. Chacune porte sur la somme (ou la somme double) d'une série de puissances : il s'agit de trouver le polynôme P dans l'une des formules ci-dessus, puis de développer cette formule pour obtenir une expression $Q(n)$, polynomiale en n, de la somme de la série en question, et enfin de résoudre une équation de la forme $Q(n) = c$ où c est une constante entière donnée.

Après avoir posé ces dix questions, Faulhaber décrit un procédé[47] permettant de calculer les coefficients du polynôme P pour $\sum n^{2k+1}$ lorsque sont connus ceux pour $\sum n^{2k}$. Ivo Schneider en déduit que Faulhaber devait avoir une formule de récurrence lui permettant d'obtenir directement les polynômes P pour tous les exposants $2k$ pairs, et une autre pour les exposants impairs. Je rappelle ici brièvement la démarche proposée par Ivo Schneider pour l'établissement de telles formules de récurrence, en prenant pour modèle la démarche menant à la formule classique[48] :

$$\sum n^3 = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\binom{\nu+1}{2}^2 - \binom{\nu}{2}^2 \right] = \binom{n+1}{2}^2$$

Au lieu de la somme indicée par ν dans la formule ci-dessus, Ivo Schneider

crit de Matthäus Beger (1588–1661, disciple de Faulhaber), sur la notion d'angle solide trièdre. Costabel a pourtant montré (cf. [8]) que le mérite majeur du *Progymnasta de solidorum elementis* est la généralisation de la dualité courbure–capacité au cas d'un angle solide d'un nombre quelconque de faces (la cas trièdre étant particulièrement simple).

[45]Par exemple, Faulhaber montre que le nombre sacré 1335 est un nombre pyramidal ayant pour nombre de côtés $2 + \frac{9}{20}$ et pour longueur d'arête 24. Bien entendu, un tel nombre figuré, n'ayant pas un nombre entier de côtés, ne se prête plus à aucune représentation géométrique.

[46]cf. [12], pp. *Bi v* à *Ciii r*.

[47]cf. [12], p. *Ciiii v*.

[48]La formule $\sum n^3 = (\sum n)^2$ était déjà connue d'al-Karajī.

considère plus généralement :

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\left(\begin{array}{c}\nu+1\\2\end{array}\right)^{s}-\left(\begin{array}{c}\nu\\2\end{array}\right)^{s}\right]$$

pour s quelconque, afin d'obtenir une formule reliant les $\sum n^{2k+1}$ pour $(2k+1) \leq (s+1)$. Pour obtenir une formule reliant les $\sum n^{2k}$, il utilise plutôt la somme :

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\left[\left(\begin{array}{c}\nu+s\\2s+1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\nu+s+1\\2s+1\end{array}\right)\right]-\left[\left(\begin{array}{c}\nu+s-1\\2s+1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\nu+s\\2s+1\end{array}\right)\right]\right\}$$

Enfin, pour obtenir une formule reliant les sommes itérées ${}^{t}\sum n^{2k}$, il propose d'utiliser :

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left\{\left[\left(\begin{array}{c}\nu+s+t-1\\2s+t\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\nu+s+t\\2s+t\end{array}\right)\right]-\left[\left(\begin{array}{c}\nu+s+t-2\\2s+t-1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\nu+s+t-1\\2s+t-1\end{array}\right)\right]\right\}$$

Il renvoie l'idée de ces formules de récurrence à un article de Tits[49] publié en 1923.

Mais revenons à l'*Academia Algebrae*. Faulhaber propose lui-même une méthode pour calculer les polynômes P dans les formules (1) et (2). Il indique d'abord comment calculer directement une expression polynomiale en n des sommes et des sommes itérées des séries de puissances $\sum n^k$. Il remarque en effet[50] que la suite des puissances n^k a pour différence k-ième une suite arithmétique de différence constante ($k!$). Alors on peut trouver, pour la suite n^k et pour ses sommes itérées, des formules analogues à celles données pour les nombres icosaédraux et dodécaédraux dans la *Miracula Arithmetica*, de la forme :

$$n^k = k!\left(\begin{array}{c}n+k-1\\k\end{array}\right)+c_{k-1}\left(\begin{array}{c}n+k-2\\k-1\end{array}\right)+\ldots+c_2\left(\begin{array}{c}n+1\\2\end{array}\right)+c_1 n$$

Faulhaber rappelle d'autre part que les expressions algébriques des sommes et des sommes itérées des séries $\sum n^k$ peuvent encore s'obtenir par récurrence au moyen de la formule énoncée au tout début des *Miracula Arithmetica*. Il propose alors, pour obtenir les polynômes P intervenant dans les formules énoncées plus haut, d'appliquer la méthode des coefficients indéterminés, déjà formulée et utilisée dans les *Miracula Arithmetica* pour la recherche des *partes aliquotae*. Certes il n'entre pas beaucoup dans les détails :

> De la même manière que l'on peut non seulement chercher les *partes aliquotas* et la valeur des racines dans les équations cossiques élevées, mais aussi trouver l'équation lorsque l'on connaît toutes ses racines, ici aussi, on peut non seulement trouver les quantités cossiques [=coefficients des puissances de x] à partir des multiplicateurs [=coefficients du polynôme P], mais aussi, inversement, trouver les

[49] cf. [29].

[50] cf. [12], p. *Dii v.*

multiplicateurs à partir de ces quantité algébriques, pour des quantités paires et impaires[51].

Il énonce dans les pages suivantes, sans les démontrer, les formules (3) et (4) pour des valeurs particulières de t et de k : ${}^2\sum n^4$, ${}^3\sum n^4$, ${}^4\sum n^4$, ${}^6\sum n^4$, ${}^2\sum n^5$, ${}^3\sum n^5$, ${}^2\sum n^6$, ${}^3\sum n^6$, ${}^4\sum n^6$, ${}^2\sum n^7$, ${}^2\sum n^8$.

La partie arithmétique de l'*Academia Algebrae* s'arrête là. Il s'agit maintenant pour Faulhaber de revenir sur sa méthode de recherche des *partes aliquotae.* Les dix questions posées au début du traité contenaient en effet chacune une équation algébrique à résoudre. Faulhaber compose alors un *Exposé approfondi sur les résolutions régulières et véritables d'un nombre infini de coss*[52]. Il y insiste particulièrement sur le changement de variable $y = x - \frac{b}{n}$ pour faire disparaître le terme en x^{n-1} dans une équation de degré n, procédé que selon lui, ni Cardan, ni Stifel, ni Johann Jung ne connaissaient. Il donne de nouveau la table des coefficients binomiaux[53], cette fois jusqu'à $n = 18$, et indique que cette table peut s'étendre facilement, soit par multiplications, soit par additions « à partir de l'angle supérieur ». Il ajoute :

> L'utilisation et l'intérêt de cette table pour résoudre un nombre infini de coss sont expliqués et rendus suffisamment évidents dans mes *Miracula Arithmetica*, puisque les équations cossiques élevées, par cette nouvelle découverte inédite, subissent une préparation, afin d'être disposées à la Résolution Régulière, et afin que l'on puisse trouver et observer les *Partes Aliquotas.* L'art entier est livré et révélé, à travers divers exemples, avec beaucoup de zèle, dans le traité déjà cité.[54]

Il rappelle ensuite la théorie de l'élimination ébauchée dans la *Miracula Arithmetica* autour du problème de Sutor, et annonce :

> Celui à qui il reste du temps, il pourrait former des centaines d'exemples semblables ; il pourrait aussi en diriger pour 3 nombres, 4 nombres, ou plus (dont les différences ou les rapports ne sont pas connus)[55] on doit cependant donner comme connues autant d'équations différentes qu'il y a de nombres, si l'on veut ne pas avoir plusieurs *Facit*[56].Mais de ces questions, de celles de Peter Roth, et aussi de nombreuses autres découvertes, peut-être qu'il en sera dit plus, en un autre lieu, si Dieu le veut.[57]

Après cet exposé sur la résolution algébrique, Faulhaber revient rapidement sur les nombres polyédraux[58]. Il donne des formules algébriques pour les sommes

[51]cf. [12], p. *Diii* ; « pour des quantités paires et impaires » , c'est-à-dire dans le cas des sommes de puissances d'exposants pairs $\sum n^{2k}$ ou d'exposants impairs $\sum n^{2k+1}$.

[52]cf. [12], p. *Ei v.*

[53]cf. [12], p. *Eii v.*

[54]cf. [12], p. *Eii v.*

[55]C'est-à-dire 3 inconnues, 4 inconnues, ou plus.

[56]C'est-à-dire si l'on veut qu'il n'y aie qu'une seule solution, ou en d'autres termes, que le problème soit « déterminé » .

[57]cf. [12], p. *Eiii r.*

[58]cf. [12], p. *Eiii r.*

des nombres polyédraux correspondant aux cinq polyèdres réguliers (comme il l'avait fait pour l'icosaèdre et le dodécaèdre en 1622).
Il énonce ensuite rapidement un problème géométrique : trouver le diamètre de la sphère circonscrite à un assemblage de quatre sphères se touchant mutuellement, de diamètres respectifs 24, 23, 29 et 22.
Puis il propose une « *Wortrechnung* » : problème algébrique dont les solutions, entières, indiquent des lettres dans un alphabet, et forment ainsi un mot (en l'occurence, le nom du jour où Faulhaber aurait terminé son *Academia Algebrae*).
Faulhaber montre comment l'énoncé de ce problème se ramène à une équation de degré 5, qu'il laisse le soin au lecteur de résoudre « suivant l'art du Sursolit Coß » qu'il a « suffisamment enseigné dans les *Miracula Arithmetica* ».
Enfin vient un « appendice »[59], proposant une autre *Wortrechnung*, plus difficile. Les nombres indiquant les lettres du mot cherché font cette fois intervenir les coefficients de certaines puissances de x dans les expressions des sommes ${}^9\sum x^8$ et $\sum x^{25}$, ainsi que les coefficients des polynômes P dans les formules donnant $\sum x^{22}$, $\sum x^{23}$, $\sum x^{24}$ et $\sum x^{25}$.
Faulhaber propose ensuite un problème qu'il a déjà traité dans un de ses ouvrages de *praxis*, la division d'une corde d'un instrument de musique en 12 parties[60]. Il ne résout pas le problème mais affirme qu'il conduit à une équation de degré 12, résoluble au moyen des logarithmes de Neper (il s'agit d'extraire une racine douzième).
Finalement, il propose trois dernières questions[61], sans les résoudre, faisant intervenir les sommes ${}^t\sum x^5$ pour $t = 1$, 2, 4, 6, 8, 10 et 12 ; ${}^t\sum x^{13}$, ${}^t\sum x^{14}$ et ${}^t\sum x^{15}$ pour $t = 1$ et 2 ; $\sum x^{18}$, $\sum x^{24}$ et $\sum x^{27}$.

5 Conclusion

En 1770, Lagrange écrivait, au sujet de la méthode de Ferrari pour la résolution des équations de degré 4 :

> Cette méthode, qu'on peut regarder comme la plus ingénieuse de toutes celles qui ont été inventées depuis pour le même objet, a été adoptée par tous les Analystes qui ont précédé Descartes ; mais cet illustre Géomètre a cru devoir lui en substituer une autre moins simple à la vérité et moins directe, mais à quelques égards plus conforme à la nature des équations : c'est celle que la plupart des Auteurs suivent aujourd'hui.[62]

Il aurait donc fallu que ce soit un « géomètre » qui découvre un procédé plus proche de la nature (ici, arithmétique) des équations ? C'est bien en effet une inspiration arithmétique qui semble gouverner cette méthode, comme l'indique le nom que lui donne Faulhaber, dès 1622, dans ses *Miracula Arithmetica* : la

[59] cf. [12], p. *Eiii v.*
[60] cf. [12], p. *F i r.*
[61] cf. [12], p. *F ii.*
[62] cf. [20], § 26.

« recherche des *partes aliquotae* ». D'ailleurs, quelques années après la publication de sa *Géométrie*, Descartes semble lui-même avoir oublié cette méthode. Lorsque Dozem l'interroge à ce sujet, Descartes répond[63]en exposant la méthode de Ferrari, et non la sienne.

Faulhaber propose une règle unique pour résoudre une équation de degré n quelconque : supprimer le terme en x^{n-1}, puis chercher les *partes aliquotae* au moyen de techniques d'élimination algébrique dans un système d'équations à plusieurs inconnues. Dans certains cas, cette méthode ne peut remplacer des procédés numériques (comme l'indique ses allusions à l'usage de « tables »), mais ce n'est pas faute de moyens algébriques, c'est « à cause de notre ignorance ». Il s'agit là d'un schéma qui se répétera jusqu'au début du XIX^e^ siècle. Ainsi Leibniz croyait pouvoir ramener la résolution de l'équation générale de degré 5 à celle d'un système linéaire de 284 équations : « Le calcul n'est ni laborieux, ni difficile, ni prolixe. »[64]. Tschirnhaus propose en 1683 de remplacer, dans la résolution de l'équation cubique, le changement de variable $y = x + a$ (pour supprimer le terme en x^2) par un autre de la forme $y = x^2 + bx + a$, afin de faire disparaître d'un seul coup les termes en x et en x^2. Il pense que sa méthode peut s'étendre à tous les degrés[65]. En 1749, c'est le théorème fondamental de l'algèbre qu'Euler tente de démontrer par la recherche des *partes aliquotae*, c'est-à-dire en décomposant toute équation en produit de facteurs quadratiques[66]. Lagrange remettra sur pied cette démonstration en 1772, en mettant à profit les techniques qu'il développe dans un mémoire de 1770–1771, les *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, dans lequel il tente de rendre apparente une continuité conceptuelle entre les différentes méthodes de résolution algébrique de ses prédécesseurs, tout en élaborant des théorèmes puissants qui seront repris au XIX^e^ siècle par Gauss, Abel, Galois.

Pour mener à bien son projet, Faulhaber fut obligé d'envisager une méthode systématique de résolution des systèmes d'équations polynomiales à plusieurs inconnues, qu'il illustra au moyen de l'« exemple de Sutor ». Une idée semblable se trouve à la base des travaux les plus importants sur l'élimination algébrique. L'idée de Faulhaber se résume à numéroter les équations successives L_i qu'il obtient par le calcul, et à appliquer à chaque étape une opération de la forme :

$$L_{i+1} = (\text{monôme})L_i + (\text{monôme})L_j$$

Bézout proposera, en 1779, de représenter l'équation résultante d'un système d'équations polynomiales $\{f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, ...\}$ sous la forme $f_1\phi_1 + f_2\phi_2 + f_3\phi_3 + ... = 0$, où ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3,... sont des polynômes adéquats[67].

[63] Lettre du 25 mars, cf. [7], vol. III, p. 553–554.

[64] Leibniz, mai 1678, cité par Knobloch [19], p. 148.

[65] cf. [30].

[66] cf. Leonhard Euler, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, communiqué à l'Académie des sciences de Berlin le 10 novembre 1746, publié en 1749.

[67] cf. [2].

Malgré les allusions de Descartes à la « méthode des coefficients indéterminés »[68] où à l'élimination algébrique des inconnues[69], la méthode de Faulhaber, si éloignée de toute intuition géométrique (comme le sera celle de Bézout, qui, dans un traité de 400 pages sur les équations, fait à peine allusion à leur représentation géométrique), est le fruit d'une tradition bien différente de celle que poursuit Descartes dans sa *Géométrie*[70].

Il faut aussi rattacher l'œuvre de Faulhaber aux travaux ultérieurs de Pascal (sur le triangle arithmétique et les séries de puissances), Bernoulli[71] (sur les nombres de Bernoulli), Newton[72] (sur les sommes itérées de séries arithmétiques). Mais ce qui a pu obscurcir l'appréciation des chapitres d'algèbre (36 à 44) des *Miracula Arithmetica* ce n'est pas seulement la comparaison avec Descartes, c'est aussi la prédominance, au sein du même ouvrage, de formules arithmétiques sur les séries de puissances, donc de considérations qui n'ont pas de rapport nécessaire à l'algèbre[73], puis de leur « démonstration » par induction empirique ; c'est la juxtaposition dans un même texte de deux rationalités pour nous différentes. C'est pourtant cette proximité disciplinaire, de fait, entre arithmétique et algèbre, qui permet à Faulhaber, dans son *Academia Algebrae*, de justifier l'extension de l'algèbre à des équations de degré supérieur à 3 par l'existence de problèmes arithmétiques conduisant à de telles équations (ainsi les formules de sommation des séries de puissances). Cependant ce rapport particulier, qui n'apparaît peut-être que comme justification *a posteriori*, et de manière explicite seulement dans son dernier traité (1631), ne doit pas détourner notre regard de la tendance générale qui a poussé de nombreux algébristes, d'al-Karajī à Euler, à appliquer leur science à l'arithmétique au sein de leurs traités d'algèbre. Roshdi Rashed suggère que ceci leur a permis, à partir de l'œuvre d'Abū Kāmil, de « fonder l'analyse diophantienne rationnelle comme partie de l'algèbre »[74]. C'est sans doute dans le cadre de l'étude de systèmes d'équations déterminés et indéterminés issus de problèmes d'arithmétique (bien que Faulhaber n'utilise pas de méthodes diophantiennes), qu'il faut situer les techniques d'élimination algébrique présentes très tôt dans l'œuvre de Faulhaber (comme en témoignent les problèmes du *Cubicossischer Lustgarten*), ainsi que le chapitre X de l'*Ars Magna* de Cardan sur les formes canoniques d'équations à deux inconnues de degré 2.

[68] cf. [7], vol. VI, p. 423 : « l'invention de supposer deux équations de même forme, pour comparer tous les termes de l'une à ceux de l'autre,..., n'est pas l'une des moindres de la méthode dont je me sers » .

[69] cf. [7], vol. VI, p. 373 : « il se faut servir par ordre de chacune des équations... et faire ainsi, en les démêlant, qu'il n'en demeure qu'une seule » .

[70] Pour deux analyses sur la corrélation entre équations algébriques et courbes géométriques au sein de la *Géométrie*, irréductible à un terme unique, cf. [3] et la préface à [23].

[71] cf. [1].

[72] cf. Newton, *Methodus Differentialis*, [22], vol. VIII, p. 236–257.

[73] Je ne parle pas ici des nombres triangulaires, qui présentent un lien naturel évident entre arithmétique et algèbre puisqu'ils fournissent le développement du binôme.

[74] cf. [24], p. 39.

Références

[1] Jacques BERNOULLI. *Ars Conjectandi.* Thurnisiorum fratrum, Basel, 1713.

[2] Etienne BÉZOUT. *Théorie générale des équations algébriques.* Ph.-D. Pierres, Paris, 1779.

[3] H. J. M. BOS. On the representation of curves in descartes' géométrie. *Archives for History of Exact Sciences*, 4(24) :295–338, 1981.

[4] Girolamo CARDANO. *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis liber unus.* Ioh. Petreium, Nürnberg, 1545.

[5] P. COSTABEL. L'initiation mathématique de descartes. *Archives de Philosophie*, 46 :637–646, 1983.

[6] René DESCARTES. *Geometria Renati Cartesii*, éd. Frans van Schooten. Elzevir, Amsterdam, 1959–1961.

[7] René DESCARTES. *Oeuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery.* Vrin, Paris, 1986.

[8] René DESCARTES. *Exercices pour les éléments des solides*, ed. P. Costabel. P.U.F., Paris, 1987.

[9] Leonhard EULER. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, ed., F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Série 1, 29 vol. ; série 2, 31 vol. ; série 3, 12 vol. ; série 4A, correspondance, 7 vol. B. G. Teubner, Leipzig Berlin Zurich Basel, 1911.

[10] Johannes FAULHABER. *Newer Arithmetischer Wegweyser. Zu der Hochnutzlichen freyen Rechenkunst, mit Newen Inventionibus geziert. Daraus ein fleissiger Praeceptor, mit Göttlicher Hülff / auch die harten Ingenia der Jugent (vermittelst der didactica) von einer Staffel zu der andern / fruchtbarlich laiten und füren kan / biß sie die Species und Exempla, in ganzen vnd gebrochenen Zahlen gründlich erlernen mögen. Auß den Aller erfahrnesten / bewehrtesten vnnd Kunstreichsten Authorn dieser Kunst / mit fleiß extrahirt, vnd zusamen getragen.* Johann Meder, Ulm, 1617.

[11] Johannes FAULHABER. *Miracula Arithmetica. Zu der Continuation seiner Arithmetischen Wegweisers gehörig.* David Franck, Augsburg, 1622.

[12] Johannes FAULHABER. *Academia Algebrae. Darinnen die miraculosische Inventiones / zu den höchsten Cossen weiters continuiert vnd proficiert werden. Dergleichen zwar vor 15. Jahren den Gelehrten auff allen Vniversiteten in gantzem Europa proponiert, darauff continuirt, auch allen Mathematicis inn der gantzen weiten Welt dedicirt, aber biß hero / noch nie so hoch / bißauff die regulierte / Zensicubiccubic Coß/ durch offnen Truck publiciert worden. Welcher vorgesetzet ein kurtz Bedencken / Was einer für Authores nach ordnung gebrauchen solle / welcher die Coß fruchtbarlich / bald / auch fundamentaliter lehrnen und ergreiffen will.* Johann Ulrich Schönigk, Augsburg, 1631.

[13] Menso FOLKERTS. « Conrad Landvogt, ein bisher unbekannter Algebraiker um 1500 » *in Amphora, Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*, ed. S. S. Demidov, M. Folkerts, D. E. Rowl et O. J. Scriba, Birkhäuser, Basel 1992.

[14] Kurt HAWLITSCHEK. *Johann Faulhaber 1580–1635. Eine Blütezeit der mathematischen Wissenschaften in Ulm.* Stadtbibliothek Ulm, Ulm, 1995.

[15] Joseph E. HOFMANN. *Michael Stifel (1487 ?–1567) : Leben, Wirken und Bedeutung für die Mathematik seiner Zeit.* Steiner, Wiesbaden, 1968.

[16] Christian HOUZEL. *La géométrie algébrique. Recherches historiques.* Albert Blanchard, Paris, 2002.

[17] Abraham Gotthelf KÄSTNER. *Geschichte der Mathematik.* Johann Georg Rosenbusch, Göttingen, 1796–1800.

[18] Wolfgang KAUNZNER. Über charakteristika in der mittelalterlichen abendländischen mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, 34(2) :143–186, 1987.

[19] Eberhard KNOBLOCH. Déterminants et élimination chez leibniz. *Rev. d'hist. des sci.*, 54(2) :143–164, 2001.

[20] Joseph LAGRANGE. Réflexions sur la résolution algébrique des équations. *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pages 134–215 (1770) et 138–253 (1771), 1770–1771. (cf. Oeuvres, t. III, p. 205–421).

[21] Kenneth L. MANDERS. « Descartes et Faulhaber » *in* Bulletin Cartésien, Archives de Philosophie, 1995, *58*(3) : 1–12.

[22] Isaac NEWTON. *The Mathematical Paper of Isaac Newton*, ed., D. T. Whiteside. Cambridge University Press, Cambridge, 1972.

[23] B. VAHABZADEH et R. RASHED. *Al-Khayyām mathématicien.* Albert Blanchard, Paris, 1999.

[24] Roshdi RASHED. Science en islam et modernité classique. *Al-Furqān Publications* : No. 71. Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, Londres, 2002.

[25] Roshdi RASHED. Al-qūhī et al-sijzī : sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques. *Arabic Sciences and Philosophy*, 13 :9–43, 2003.

[26] Adam RIES. *Coß*, ed. Wolfgang Kaunzner et Hans Wussing. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1992.

[27] Peter ROTH. *Arithmetica Philosophica, Oder schöne newe wolgegründte Vberauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae / In drey vnterschiedliche Theil getheilt. [...].* Johann Lanßenberger, Nürnberg, 1608.

[28] Ivo SCHNEIDER. *Johannes Faulhaber 1580–1635, Rechenmeister in einer Welt des Umbruchs.* Birkhäuser, Basel, 1993.

[29] L. TITS. Sur la sommation des puissances numériques. *Mathesis*, 37 :353–355, 1923.

[30] D. TSCHIRNHAUS. Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione. *Acta Eruditorum*, pages 204–207, 1683.