Intro Physique

Erwan Penchèvre

3 février 2014

Plan

Définitions

- Le point est ce dont la partie est nulle.
- Une ligne est une longueur sans largeur.
- ...
- La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
- ...
- Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
- ...
- Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Demandes (postulats)

1) Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2) Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3) D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4) Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5) *Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

Notions communes (axiomes)

- Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
- Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
- ...

Énoncé équivalents aux 5$^{\text{ème}}$ postulat

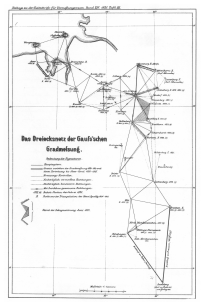
- Il existe au plus une parallèle à une droite donnée passant par un point donné.
- Il existe des triangles semblables de toutes les tailles
- Il existe un triangle dont la somme des trois angles est égale à deux droits.

Saccheri

De nombreux savants de l'Antiquité tardive, du Moyen âge et de la Renaissance cherchent une démonstration du 5$^{\text{ème}}$ postulat.
Nombreux textes, en grecs, en arabe, en latin.
En 1733, Saccheri examine les conséquences de l'hypothèse suivante :
Une droite d étant donnée, on peut mener deux droites qui ne se rencontrent pas, l'une étant perpendiculaire à d, et l'autre formant un angle aigu avec d.
Saccheri cherche une démonstration par l'absurde du 5$^{\text{ème}}$ postulat.

Gauss, Bólyai, Lobachevski

Gauss (1777-1855)
Relevés topographiques dans le Harz.

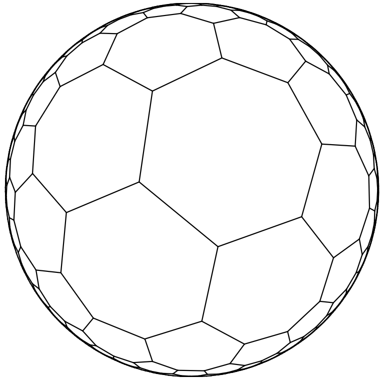


gauss3eck.jpg

1820-1830 : Gauss, Bólyai, Lobachevski
Espace bidimensionnel de courbure négative constante.
Cette géométrie est-elle consistante ?
Trouver un modèle

modèle découvert par Klein

Aucune surface plongée dans
$\mathbb{R}^3$ euclidien
n'est modèle d'un espace
bidimensionnel de courbure
négative constante.
Modèle de Klein.
Violation des énoncés
équivalents au 5ème postulat.



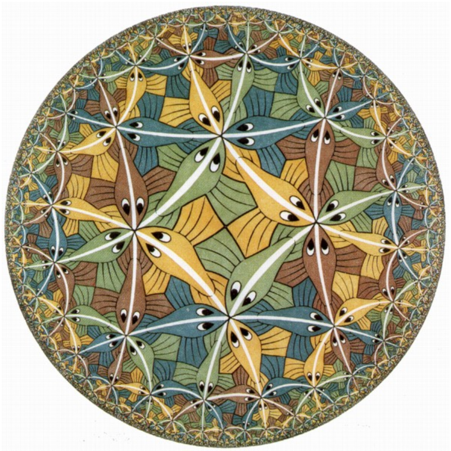
Modèle découvert par Klein

la métrique

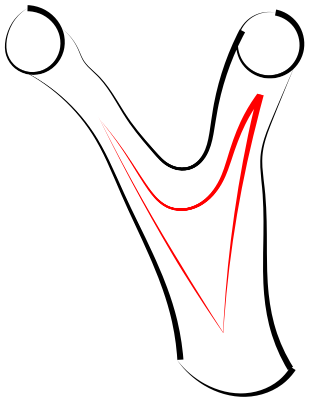
$$\cosh\left(\frac{d(x,X)}{a}\right) = \frac{1 - x_1X_1 - x_2X_2}{\sqrt{(1-x_1^2-x_2^2)(1-X_1^2-X_2^2)}}$$

$$\lim_{X_1^2+X_2^2\to 1} d(x,X) = +\infty$$

disque de Poincaré



branche d'un arbre



Classification des surfaces

Sans plongement, comment classer et décrire ces espaces bidimensionnels courbes ?
Géométrie intrinsèque.
Gauss 1827, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*

Un invariant métrique euclidien

- N points, $2N-3$ coordonnées
- $\dfrac{N(N-1)}{2}$ distances entre N points
- élimination algébrique $\mapsto$ M relations algébriques entre les distances

$$M = \frac{N(N-1)}{2} - (2N-3) = \frac{(N-2)(N-3)}{2}$$

- ce sont des invariants (valables aussi sur un cylindre ou un cône, mais pas sur une sphère)

Pour $N=4$,

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & d_{12}^4 d_{34}^2 + d_{13}^4 d_{24}^2 + d_{14}^4 d_{23}^2 + d_{23}^4 d_{14}^2 + d_{24}^4 d_{13}^2 + d_{34}^4 d_{12}^2 \\
& + d_{12}^2 d_{23}^2 d_{31}^2 + d_{12}^2 d_{24}^2 d_{41}^2 + d_{13}^2 d_{34}^2 d_{41}^2 + d_{23}^2 d_{34}^2 d_{42}^2 \\
& - d_{12}^2 d_{23}^2 d_{34}^2 - d_{13}^2 d_{32}^2 d_{24}^2 - d_{12}^2 d_{24}^2 d_{43}^2 - d_{14}^2 d_{42}^2 d_{23}^2 \\
& - d_{13}^2 d_{34}^2 d_{42}^2 - d_{14}^2 d_{43}^2 d_{32}^2 - d_{23}^2 d_{31}^2 d_{14}^2 - d_{21}^2 d_{13}^2 d_{34}^2 \\
& - d_{24}^2 d_{41}^2 d_{13}^2 - d_{21}^2 d_{14}^2 d_{43}^2 - d_{31}^2 d_{12}^2 d_{24}^2 - d_{32}^2 d_{21}^2 d_{14}^2
\end{aligned}$$

coordonnées localement euclidiennes

Definition (surface métrique)

Une surface métrique est une surface en chaque point de laquelle il existe un système de coordonnées (ξ_1, ξ_2) qui vérifie (localement) un théorème de Pythagore infinitésimal :

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2$$

Pour un autre système de coordonnées, on aura

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2 g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2$$

Cette forme quadratique est la métrique.

exemples

- le modèle de Klein de la géométrie hyperbolique

$$g_{11} = \frac{a^2(1-x_2^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}, \; g_{12} = \frac{a^2 x_1 x_2}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}, \; g_{22} = \frac{a^2(1-x_1^2)}{(1-x_1^2-x_2^2)^2}$$

- une sphère de rayon a, coordonnées sphériques

$$g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\phi\phi} = a^2 \sin^2\theta$$

- le plan euclidien, coordonnées polaires

$$g_{rr} = 1, \quad g_{r\theta} = 0, \quad g_{\theta\theta} = r^2$$

Changement de coordonnées $(x_1, x_2) \to (x_1', x_2')$

$$g_{11}' = g_{11} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\right)^2 + 2 g_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} + g_{22} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1'}\right)^2$$

Les coefficients de la métrique ne sont pas invariants.

Courbure de Gauss

Quodsi iam has expressiones diuersas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, peruenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus F, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$\begin{aligned}4(EG-FF)^2 k = {} & E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)\\ & + F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq}\right.\\ & \left. + 4\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right)\\ & + G\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\cdot\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)\\ & - 2(EG-FF)\left(\frac{ddE}{dq^2} - 2\frac{ddF}{dp.dq} + \frac{ddG}{dp^2}\right)\end{aligned}$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curua in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curuaturae in singulis punctis inuariata manet.*

quelques valeurs de k

- Pour une sphère de rayon a, $k = a^{-2}$
- pour l'espace de Gauss, Bòlyai, Lobachevski, $k = -a^{-2}$
- pour le plan euclidien $k = 0$

Riemann

Généralisation difficile à un espace de dimension D.

- $\dfrac{D(D+1)}{2}$ coefficients g_{ij}
- D dimensions $\rightarrow$ choix arbitraire d'un système de D coordonnées
- il doit rester $C = \frac{D(D+1)}{2} - D = \frac{D(D-1)}{2}$ fonctions des coefficients de la métrique (ou de leurs dérivées) qui décrivent la géométrie intrinsèque de l'espace
- pour $D = 2$, $C = 1$, courbure de Gauss
- pour D quelconque, Riemann 1854 Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, tenseur de Riemann

variété à D dimensions chez Riemann

Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre d'une manière continue, ils forment une variété (*) continue ou une variété discrète; chacun en particulier de ces modes de détermination s'appelle dans les premier cas un point, dans le second un élément de cette variété. Les concepts dont les modes de détermination forment une variété discrète sont si fréquents que, étant donnés des objets quelconques, il se trouve toujours, du moins dans les langues cultivées, un concept qui les comprend (et les mathématiciens étaient par conséquent en droit, dans la théorie des grandeurs discrètes, de prendre pour point de départ la condition que les objets donnés soient considérés comme de même espèce). Au contraire les occasions qui peuvent faire naître les concepts dont les modes de détermination forment une variété continue, sont si rares dans la vie ordinaire, que les lieux des objets sensibles et les couleurs sont à-peu-près les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une variété de plusieurs dimensions. C'est seulement dans les hautes mathématiques que les occasions pour la formation et le développement de ces concepts deviennent plus fréquentes.

- Galilée (1564-1642) : l'accélération d'un corps en chute libre est indépendante de sa masse.
- $\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow$ la force exercée sur un corps en chute libre est proportionnel à sa masse (Newton)
- 3ème loi de Newton (actions réciproques) : F est aussi proportionnelle à la masse de la source
- sur Terre $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ avec $g \simeq 10$ ms^{-2}

$$\mathbf{F} = m_i\mathbf{a}, \qquad \mathbf{F} = m_g\mathbf{g}, \qquad m_i = m_g \ ?$$

Tests expérimentaux

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)\mathbf{g}$$

période d'un pendule $\sim \sqrt{m_i/m_g}$
Newton : aucune différence notable entre des pendules différents
1889, Eötvös (Budapest) : pour le bois et le platine,

$$\frac{\Delta(m_g/m_i)}{m_g/m_i} < 10^{-9}$$

- pour la Lune $r = 60$ rayons terrestres, période $\simeq 29$ jours, elle "tombe" sous la tangente à sa trajectoire, en une seconde, de 0.0045 ft
- si la gravitation est en r^{-2}, une pomme dans le Lincolnshire devrait tomber, en une seconde, 3600×0.0045 ft $= 16$ ft. Newton 1666 ne publie pas. La Terre n'est pas une masse ponctuelle...
- Newton 1684, à la demande de Halley : démonstration des lois de Kepler sous l'hypothèse d'une loi en r^{-2}

La Terre et les Cieux : une seule physique !
Mais pas complètement : (cf. exercice Olbers)

- la lumière des astres (Planck 1905, rayonnement du corps noir, quantique)
- Univers homogène ou hiérarchique ?
- Univers fini ? (pour les surfaces, géométrie sphérique finie, géométrie hyperbolique infinie)
- Univers immobile ou en expansion ?

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = G \sum_M \frac{m_N m_M (\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N)}{|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_N|^3}$$

équation invariante pour le groupe de Galilée :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{d} \\ t' &= t + \tau \end{aligned}$$

groupe de transformations à 10 paramètres seulement
pourquoi les référentiels galiléens ?
référentiels en mouvement rectiligne uniforme par rapport à l'espace absolu

Newton *Principia Philosophae Naturalis*, 1686

Si l'on suspend un récipient à une corde longue, et si par la suite on la tord suffisamment, puis on remplit le récipient avec de l'eau et on le tient au repos ; si par la suite on le lâche en donnant une impulsion à tourner dans le sens permettant à la corde de se détendre, le récipient continuera à tourner pendant assez longtemps ; l'eau, dont la surface était plane au début, en suivant le mouvement circulaire communiqué par le récipient, va être repoussée de plus en plus vers les parois, et va monter aux bords en formant une surface concave (comme je l'ai observé), et plus le mouvement est rapide, plus haut montera l'eau aux bords du récipient.

Critiques philosophiques

Berkeley 1710, *Principes de la connaissance humaine*

Si nous supposons que tout l'Univers est annihilé à l'exception d'un objet, il serait impossible d'imaginer un mouvement quelconque dudit objet. [...] Imaginons deux objets comme seules choses existant dans l'Univers matériel : il serait alors impossible d'imaginer un mouvement circulaire autour d'un centre commun. Mais en supposant que le ciel d'étoiles fixes soit créé subitement, nous pourrons alors voir le mouvement de ces deux objets en observant leur position relative par rapport aux parties différentes du ciel.

Critiques philosophiques

Kant, *Prolégomènes* 1783

Si notre intuition était de nature à représenter des objets comme ils sont en soi, *il ne se produirait aucune intuition* a priori, *mais elle serait toujours empirique. Car je ne puis savoir ce que contient l'objet en soi que s'il m'est présent et donné. [...] Par suite, il n'y a pour mon intuition qu'une seule manière d'être antérieure à la réalité de l'objet et de se produire comme connaissance* a priori, *c'est* de ne contenir autre chose que la forme de la sensibilité qui dans mon sujet précède toutes les impressions réelles par lesquelles les objets m'affectent. *[... L'espace et le temps] sont de simples formes de notre sensibilité qui doivent précéder toute intuition empirique, c'est-à-dire la perception d'objet réels, et conformément auxquelles des objets peuvent être connus* a priori, *mais, il est vrai, uniquement comme ils nous apparaissent.*

Mach 1872

Il ne peut exister, à mon avis, que des mouvements relatifs. Quand un corps tourne par rapport aux étoiles, les forces centrifuges sont engendrées ; quand un corps tourne par rapport à un autre corps, mais pas par rapport aux étoiles, aucune force centrifuge n'est engendrée. [...] Apparemment, il est sans importance que nous admettions que la Terre tourne autour de son axe par rapport aux étoiles fixes, ou que ce soit les étoiles dites fixes qui tournent autour de la Terre. [...] Soit tout mouvement est absolu, soit notre loi de l'inertie est mal exprimée. Je préfère la deuxième solution.

rotation moyenne des galaxies autour de n'importe quel axe passant par le Soleil ≤ 1 arcsec / siècle !
Coïncidence ?

Principe de Mach

La masse inertielle d'un corps, et le fait qu'un référentiel soit galiléen ou non pour ce corps, sont influencés par la masse de la Terre et des autres corps célestes.

L'interaction gravitationnelle ne se réduirait donc pas à $\dfrac{Gm_Nm_M}{|\mathbf{X}_M - \mathbf{X}_N|^2}$?

Comparaison avec l'électromagnétisme

Champ électrique produit en un point P par une charge q en mouvement

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e'_r}{r'^2} + \frac{r'}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{e'_r}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2}e'_r\right)$$

e'_r est le vecteur unité retardé de la charge au point P
r' est la distance retardée de la charge au point P
Les premiers termes : forces de Coulomb en $1/r^2$.
3ème terme : terme radiatif en $1/r$.
Dans le cas d'une accélération latérale, contribution colinéaire à l'accélération de la charge.
La force gravitationnelle possède-t-elle aussi un terme radiatif en $1/r$?

Comparaison avec les forces d'inertie

- Si la force gravitationnelle est analogue aux forces électromagnétiques, alors elle ne dérive pas d'un potentiel scalaire.
- Principe de Mach $\rightarrow$ les forces d'inertie sont un effet gravitationnel
- les forces d'inertie dérivent-elle d'un potentiel scalaire ? La force centrifuge oui, mais pas la force de Coriolis.

c est une constante

théorie de l'électrodynamique (Maxwell 1864) $\Rightarrow$ vitesse de la lumière constante, indépendante du mouvement de la source
Contradiction avec le principe de relativité de Newton
Hypothèse d'un éther luminifère.
Expérience de Michelson et Morley (1887) : c dans la direction du mouvement orbital de la Terre est égale à c dans la direction transverse !
La Terre est immobile au sein de l'éther ?
Les instruments de mesure subissent des contractions dues au "vent d'éther" ?

La Relativité Restreinte

Einstein 1905 remplace le groupe galiléen par un autre groupe à 10 paramètres :

la transformée de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{-\frac{xv}{c^2} + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Principe de la Relativité Restreinte
$=$ restauration du principe de relativité de Newton
électrodynamique saine et sauve ! Mais d'autres problèmes nous guettent...

- Relativité Restreinte $\Rightarrow$ pas de force agissant de manière instantanée ! (paradoxe transmission signal...)
- La force électromagnétique n'agit pas de manière instantanée ; le champ est une onde, phénomène radiatif.
  La force de Coulomb en $1/r^2$ n'est qu'une approximation (faibles vitesses et accélérations).
- Mais la force gravitationnelle de Newton agit de manière instantanée

Apories de la physique pré-einsteinienne
(et même einsteinienne, au sens restreint) :

- $m_g = m_i$
- principe de Mach non respecté
- actions à distance des forces gravitationnelles
- cosmologie

Principe d'équivalence (Einstein 1907)

Un système qui subit une accélération constante par rapport aux étoiles fixes et un autre au repos dans un champ gravitationnel uniforme sont strictement équivalents. On ne peut pas parler d'accélération absolue, pas plus qu'on ne peut parler de vitesse absolue pour des référentiels d'inertie.

Einstein, 1916 The Foundation of the General Theory of Relativity : champ gravitationnel $=$ tenseur de Riemann.