

HISTOIRE

Le livre *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* de Roshdi Rashed

Erwan Penchèvre¹

Le livre *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*² nous offre à présent une image plus nette du développement de la géométrie dans la deuxième moitié du X^e siècle, image centrée autour d'un groupe de mathématiciens actifs principalement à Bagdad, Ibn Sahl (actif de 968 à 983), al-Qūhī (actif de 943 à 988) et al-Sijzī (actif de 963 à 998). Il nous offre aussi l'édition critique de nombreux textes originaux en arabe, accompagnée d'une traduction anglaise. Les commentaires de R. Rashed occupent un peu plus du tiers de l'ouvrage ; le reste consiste en l'édition et la traduction des textes originaux. R. Rashed n'hésite pas à comparer, à plusieurs reprises, les grands mathématiciens du X^e siècle à ceux, européens, du XVII^e siècle. Se pose même en filigrane la question de la continuité historique dans le développement d'un des sujets de géométrie apparus au X^e siècle. Mais l'historien se méfie peut-être, comme l'écrivait Fernand Braudel, « *de qui reconnaît trop bien les bagages ou de ceux qui, par réaction, nient en bloc les emprunts de civilisation à civilisation* ». Et il organise son ouvrage autour de questions plus spécifiques : qu'est-ce, écrit-il, qu'être un géomètre de premier rang *dans* la seconde moitié du X^e siècle³ ? Ou encore, question plus délicate : pourquoi Ibn al-Haytham⁴ (actif au Caire dans la première moitié du XI^e siècle), mathématicien célèbre, astronome et fondateur de l'optique physique à la fin du X^e siècle, n'a-t-il pas mis à profit la loi de réfraction dite « de Snell-Descartes » découverte peu auparavant par Ibn Sahl⁵ ? Il s'appuie d'abord, pour répondre à ces questions, sur les traces matérielles de l'activité scientifique, sur l'historiographie et autant que faire se peut sur la connaissance du milieu scientifique et des modes d'acquisition et de transmission du savoir à cette époque, pour ensuite seulement, par une analyse mathématique et épistémologique précise des textes qui nous sont parvenus, déterminer les caractéristiques objectives de la science du X^e siècle. Il remarque ainsi le paradoxe

¹ Université Paris VII.

² Ce livre, paru en 2005 (Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, Londres, 1178 pages), est né du projet d'une seconde édition de *Géométrie et dioptrique au X^e siècle* (1993, Les Belles Lettres). Mais tout en reprenant le contenu de cet ouvrage, R. Rashed y ajoute beaucoup ; le volume a plus que doublé.

³ cf. R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, p. 295.

⁴ Aussi connu sous le nom latin d'Alhazen. Sur ce personnage, cf. l'étude biobibliographique faite par R. Rashed dans *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. II (1993), Londres, p. 1–19, étude complétée dans les volumes suivants : vol. III (2000) p 937–941, vol. IV (2002) p. 957–959.

⁵ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 180.

d'un renouveau scientifique en un siècle d'éclatement du pouvoir, le rôle de la compétition entre savants, l'importance des réseaux d'échanges au sein des salons et des cours, et la connaissance approfondie des textes mathématiques de l'antiquité grâce au courant massif des traductions. Mais il insiste sur l'insuffisance de ces conditions pour expliquer la genèse de certaines traditions de recherche. Il faut aussi tenir compte de la naissance d'une science expérimentale, de l'importance des applications d'un domaine scientifique à l'autre (voire de la science aux techniques), ou de certaines configurations conceptuelles qui traversent l'ensemble de la production mathématique de l'époque. Nous en décrivons ci-dessous quelques exemples. De l'idée ancienne, déjà battue en brèche par les historiens, selon laquelle les mathématiques arabes n'auraient fait que transmettre la science grecque, survit parfois encore aujourd'hui une opinion confinant le mérite des mathématiciens arabes à la création de l'algèbre ; le livre de R. Rashed montre combien cette opinion est en deçà de la réalité.

Des chapitres non hellénistiques en géométrie

R. Rashed est parvenu à reconstituer le portrait d'un grand mathématicien longtemps inconnu : Ibn Sahl. Bien que son œuvre en géométrie infinitésimale soit perdue, ses recherches sur les coniques le montrent actif à la constitution de plusieurs « chapitres non hellénistiques » en géométrie : la résolution des problèmes de constructions géométriques par intersection de coniques, la théorie des projections, le tracé continu des sections coniques. Enfin, Ibn Sahl fonde la dioptrique – nous y reviendrons. C'est aussi selon ces différents domaines que s'organise l'ouvrage de R. Rashed.

En ce qui concerne le premier domaine, la résolution des problèmes de constructions géométriques par intersection de coniques, R. Rashed édite un manuscrit anonyme, le *Livre sur la synthèse des problèmes analysés par Ibn Sahl*. Corrigeant une opinion antérieure, il identifie son auteur : un certain al-Shannī⁶. Mais c'est surtout chez al-Qūhī, puis chez Ibn al-Haytham, que l'on voit les signes les plus probants de la constitution d'un chapitre sur les constructions géométriques. R. Rashed avait déjà édité les textes sur la construction de l'heptagone régulier⁷, il y ajoute tous les textes connus sur l'extraction d'une moyenne proportionnelle et la trisection de l'angle écrits par al-Qūhī, les textes de certains de ses prédécesseurs sur ce sujet, un texte d'al-Qūhī sur le « lemme à la division de la droite » d'Archimède (nous y reviendrons) et un texte sur la construction d'un certain pentagone équilatéral inscrit dans un carré, problème nouveau particulièrement difficile, qui conduirait en termes algébriques à la résolution d'une équation du quatrième degré. Chez tous ces auteurs et surtout à partir d'al-Khāzin (mort vers 960), on remarque une préférence pour la méthode de résolution par intersection de coniques vis-à-vis

⁶ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 7–9.

⁷ cf. R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle*, vol. III, Londres, 2000.

de la méthode par *neusis* héritée des grecs⁸. R. Rashed trouve ici l'une des caractéristique de la science du X^e siècle : les mathématiciens « cessent d'accepter des choses qui semblent évidentes par le simple fait qu'elles existent »⁹.

Il fallait aussi, pour rendre légitime les constructions par intersection de coniques, justifier l'existence même des sections coniques au sein d'une nouvelle classification des courbes, les mettant à pied d'égalité avec droite et cercle. C'est pourquoi ces méthodes semblent appeler le développement d'un autre chapitre, celui du tracé continu des sections coniques. Mais des raisons pratiques président aussi à la naissance de ce chapitre. Al-Qūhī décrit son « compas parfait », dans un traité qui fera encore autorité au début du XII^e siècle et qu'il destinait en particulier à la construction des astrolabes et des cadrans solaires¹⁰. Cet instrument est formé d'un crayon glissant le long d'une droite (AC) en rotation autour d'un axe fixe (AB). La pointe du crayon en C trace alors une section conique sur un plan passant par B (ou une droite si $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{2}$). Notons α et β les angles \hat{A} et \hat{B} du triangle ABC lorsque celui-ci est dans un plan perpendiculaire au plan de la section. On se pose alors le problème de déterminer les angles α et β en fonction de la section conique à tracer (donnée par ses diamètre et côté droit)¹¹. Al-Qūhī utilise, dans ses démonstrations, des lemmes dont la démonstration est donnée dans un autre traité sur *La génération de points sur des lignes selon des rapports dont les termes sont des surfaces*, traité qui semble avoir été perdu assez tôt, puisque Ibn 'Irāq envoya à son élève al-Bīrūnī (973–1050) la démonstration de ces lemmes, ce dernier n'ayant pu trouver l'ouvrage en question¹². Ibn Sahl, peut-être rebuté¹³ par la complexité des calculs de α et β , opte pour un mécanisme de tracé plus adapté à la fabrication des miroirs et lentilles qu'il a en vue, au moyen d'un système de fils et de poulies, et reposant sur la description focale des sections coniques¹⁴. Par exemple, pour une hyperbole \mathcal{M} de foyer F et F' , son système revient essentiellement à faire tourner une règle $[SF]$ de longueur constante autour de F , et à utiliser la propriété focale pour le point $M = \mathcal{M} \cap [SF]$,

$$MF' + MS = MF' + FS - FM = \text{constante}$$

Al-Sijzī qualifie les courbes traçables au compas parfait (droite, cercle, sections coniques) de « mesurables » en tant qu'elles sont « soumises à la théorie des proportions », et distingue parmi les autres courbes l'hélice cylindrique qui, bien que

⁸ Chez al-Khāzin, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 403. On trouve cette préférence même parfois pour des problèmes plans, ainsi chez Ibn Sahl, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 1054. Quant à la méthode de *neusis*, voir *ibid.* p. 339–440. Cette méthode pouvait être employée dans des solutions mécaniques de problèmes de constructions géométriques ; un exemple célèbre de *neusis* consiste à placer (empiriquement) entre deux droites données un segment passant par un point donné et de longueur donnée.

⁹ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 402.

¹⁰ cf. dernier paragraphe du *Traité sur le compas parfait* d'al-Qūhī, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 796.

¹¹ Ce problème ressemble aux problèmes traités par Apollonius à la fin du livre I des *Coniques*, sauf qu'ici AB est constante, et qu'al-Qūhī applique la théorie du compas parfait au tracé continu de la courbe qu'Apollonius se contentait de déterminer comme section de cône.

¹² cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 677.

¹³ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 635.

¹⁴ Bien que ses instruments garantissent de manière évidente que les courbes tracées vérifient les propriétés focales, Ibn Sahl ne démontre pas que les propriétés focales caractérisent les sections coniques (il démontre en fait seulement la réciproque).

non-mesurable, n'en possède pas moins « ordre et régularité ». R. Rashed trouve des précédents à cette classification des courbes¹⁵, en particulier chez Geminus (I^{er} siècle av. J.-C.) qui avait remarqué que le caractère composé du mouvement décrivant l'hélice (rotation et translation) n'empêchait pas que celle-ci possède certaines propriétés géométriques, conséquences de l'existence d'un groupe transitif de déplacements de la courbe sur elle-même ; l'on ne pouvait plus désormais se suffire d'un critère mécanique (la composition des mouvements) pour classer les courbes. A cet égard, le geste d'al-Sijzī au X^e siècle, ralliant les sections coniques aux « courbes simples » non seulement parce qu'elles sont, au même titre que droite et cercle, traçables par le mouvement du compas parfait, mais aussi parce qu'elles sont « soumises à la théorie des proportions » (ce sont, dirions-nous aujourd'hui, des courbes algébriques de degré 2), et excluant ainsi de la géométrie les courbes transcendentes, marque un pas important dans la direction suivie plus tard par Descartes qui qualifiera de « géométriques » toutes les courbes algébriques.

Mais si la théorie du tracé continu donne un sens nouveau à la question de l'existence des objets géométriques, elle n'y répond pas entièrement : comment en effet démontrer l'existence d'un point d'intersection de deux courbes, en l'absence du concept topologique de continuité ? R. Rashed remarque en tout cas que ces deux préoccupations, existence des points d'intersection et tracé continu, étaient encore vivantes au XIII^e s., chez des auteurs qui se côtoyaient, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī pour l'existence des points d'intersection, et un groupe de mathématiciens dans l'entourage d'Ibn Yūnus pour le tracé continu des courbes¹⁶. Et la notion même de section semble acquérir, dès le X^e s., un statut toujours plus légitime : al-Sijzī fonde à cette époque un nouveau chapitre de la géométrie, l'étude des surfaces quadratiques au moyen de leurs sections planes. Il n'est donc pas surprenant de le voir imaginer, dans un court texte à la lecture difficile, un compas parfait d'axe AB variable afin de tracer plusieurs sections (semblables) d'un même cône. R. Rashed édite deux autres textes d'al-Sijzī sur ce sujet, *Sur les propriétés du dôme hyperbolique et du dôme parabolique* et *Sur les propriétés des solides elliptiques, hyperboliques et paraboliques*, où l'auteur collecte et étend les résultats des Banū Mūsā, Ibn Qurra, al-Qūhī et Ibn Sahl qui avaient étudié certaines surfaces quadratiques pour en chercher le volume ou pour faire des miroirs et des lentilles. Al-Sijzī fait une étude purement géométrique des sections planes de ces surfaces. On pourrait déjà parler d'une « théorie des intersections » qui débouche, chez al-Sijzī, sur une classification des surfaces ; il se limite cependant aux surfaces construites par rotation ou translation d'une section conique (prismes de base une section conique, droits ou obliques, et surfaces de révolution d'une section conique autour de son axe – seulement autour de l'axe transverse pour l'hyperbole).¹⁷

¹⁵ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 670–677.

¹⁶ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 692.

¹⁷ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 418. Ajoutons qu'à l'occasion de ces recherches, al-Sijzī est amené à utiliser la notion de puissance d'un point par rapport à une section conique (cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 412, conséquence d'Apollonius, *Coniques* III.17, et aussi présente en filigrane dans un autre texte édité par R. Rashed, *Les propriétés des trois sections coniques*, dans lequel al-Sijzī étudie certaines propriétés harmoniques des coniques, invariantes par projection). Indiquons aussi la publication récente par R. Rashed du premier volume de l'*Œuvre mathématique d'al-Sijzī*, intitulé *Géométrie des coniques et théorie des nombres* (Louvain, 2004).

Quant au domaine des transformations géométriques, il offre des procédés démonstratifs nouveaux comme on peut le voir dans le *Traité sur le compas parfait* d'al-Qūhī (usage des similitudes) ou dans les travaux sur les surfaces d'al-Sijzī (translations). Le *Traité sur l'art de l'astrolabe* d'al-Qūhī commence par un chapitre théorique sur les projections coniques et cylindriques ; la lecture de ce chapitre est facilitée par l'important commentaire contemporain d'Ibn Sahl. Al-Qūhī y énonce que l'image d'un cercle d'une sphère par une projection conique de centre situé sur un axe de la sphère (ou cylindrique de direction parallèle à l'axe) sur un plan perpendiculaire à l'axe est une section conique. Dans le cas particulier de la projection stéréographique cher aux astrolabistes, il démontre que l'image d'un cercle est un cercle, et étudie tout particulièrement, dans le premier livre de ce traité, la construction de l'image des cercles parallèles à un horizon donné de la sphère et des « cercles de hauteur » qui leur sont perpendiculaires, sur le plan de l'équateur, image formant deux faisceaux de cercles conjugués. Pour démontrer ces résultats, al-Qūhī développe un recours systématique à des « rabattements », le plan des figures qu'il construit représentant à la fois le plan du méridien du lieu et le plan image de la projection stéréographique (c'est-à-dire le plan de l'équateur) rabattu sur ce dernier. En étudiant des problèmes inverses dans le second livre, al-Qūhī cherche une caractérisation plus étroite de la projection stéréographique. Par exemple, étant donné, dans le plan de la figure, le pôle de la sphère, un point image d'un point situé sur le méridien du lieu, et la distance angulaire de son antécédent au pôle de la sphère, il se pose le problème de « construire l'astrolabe », c'est-à-dire, ici, de trouver le centre de la sphère.

Une certaine « conception synthétique » de l'objet mathématique¹⁸ est peut-être une autre caractéristique des mathématiques arabes du X^e siècle. En rédigeant la solution d'un problème de géométrie, le mathématicien doit préciser les conditions de possibilité des constructions qu'il décrit, selon les valeurs des données du problème, ce qui l'amène à distinguer plusieurs cas (on dit qu'il y a alors « diorisme »¹⁹), dans chacun desquels il doit démontrer que la construction est possible et qu'elle fournit la solution. La solution d'un cas ne suffit pas : la démonstration doit être valable dans tous les cas. Ainsi le « lemme à la division de la droite », dû à Archimède (*La sphère et le cylindre* II.4, sans démonstration), est généralisé par al-Qūhī en l'énoncé suivant²⁰ :

Soient deux segments AB et C , trouver sur la droite (AB) , entre A et B ou au-delà de B , un point D tel que $\frac{AD}{C} = \frac{C^2}{BD^2}$.

Al-Qūhī résout ce problème par intersection d'une parabole \mathcal{P} et d'une hyperbole \mathcal{H} , en distinguant le cas où D est entre A et B de celui où D est au-delà de B . Dans le premier cas, il distingue encore des sous-cas, l'existence d'un point d'intersection de \mathcal{P} et \mathcal{H} dépendant alors du signe de l'expression $\frac{4}{27}AB^3 - C^3$. Autre exemple, un problème plan attribué à Apollonius²¹ :

¹⁸ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 403.

¹⁹ cf. R. Rashed et H. Bellostta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e siècle*, Leiden : E. J. Brill, 2000, p. 39.

²⁰ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 383–389.

²¹ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 314–324.

Soit un angle xAy et un point D de sa bissectrice, construire une droite passant par D et coupant les côtés de l'angle en B et C tels que BC soit égal à une longueur donnée EG .

Al-Shannī en rédige la synthèse à partir de l'analyse qu'en donne Ibn Sahl. Le diorisme consiste ici à déterminer la valeur minimale de EG pour laquelle ce problème a une solution.²²

À la même époque, on observe cette attitude chez les algébristes qui, pour classer les équations, prennent pour critère ce que l'on appellerait aujourd'hui le signe des coefficients. Ils se proposent de donner un algorithme de résolution pour chaque classe d'équations, en précisant aussi les conditions d'existence des solutions au moyen du discriminant. En ce qui concerne les problèmes de constructions géométriques, il est certes impossible de donner une telle classification *a priori* de tous les problèmes, à moins de sortir du cadre de la géométrie et de les interpréter justement comme problèmes d'algèbre, ce que certains tentèrent, aussi bien pour les problèmes solides que pour les problèmes plans, dès le IX^e siècle²³. Mais dans le cadre strict de la géométrie, il était toutefois possible de distinguer de grandes classes de problèmes, comme celle des problèmes solides, voire de procéder avec méthode en faisant varier l'énoncé d'un problème (peut-être à un niveau purement formel) afin d'en dériver plusieurs énoncés distincts²⁴, ou même de classer les problèmes en reliant le nombre de leurs « solutions » au nombre de leurs « hypothèses »²⁵.

La naissance de la dioptrique

Penchons-nous à présent sur les textes et les commentaires de R. Rashed concernant la naissance de la dioptrique et la différence de style entre Ibn Sahl et Ibn al-Haytham. R. Rashed a réussi à reconstituer l'ordre du traité *Sur les instruments ardents* d'Ibn Sahl, qui nous est parvenu sous forme fragmentaire²⁶. Ibn Sahl était au confluent de deux traditions distinctes : celle des catoptriciens grecs et arabes

²² On pourrait encore donner, comme troisième exemple, un problème de lieu sur la construction d'un triangle acutangle (cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 334–335), dont R. Rashed pense qu'il peut appartenir au traité perdu d'Ibn Sahl *Sur les lignes de diorisme*. Le lieu solution, qui est une partie d'une ellipse, possède 0, 1 ou 2 composantes connexes suivant la valeur des données du problème.

²³ Par exemple al-Māhānī, cf. R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien* (Paris, Albert Blanchard, 1999), p. 254. Ces tentatives consistaient toujours, à notre connaissance, à ramener la résolution d'un problème de construction géométrique à la résolution d'une équation polynomiale à une inconnue. Il a donc fallu attendre jusqu'au XVII^e siècle l'interprétation de problèmes de géométrie à plusieurs grandeurs inconnues comme systèmes d'équations algébriques à plusieurs inconnues (cf. *Histoire de la théorie de l'élimination*, Thèse de doctorat, Université Paris VII, Erwan Penchèvre).

²⁴ Ibn Sahl dans son étude sur la projection stéréographique (*Geometry and Dioptrics* p. 873) ; Al-Qūhī dans un texte de mathématiques appliquées (cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 1002). Nous pourrions également citer un passage de la correspondance entre Al-Qūhī et al-Ṣābi' éditée par Philippe Abgrall, *Le développement de la géométrie aux IX^e–XI^e siècles : Abū Sahl al-Qūhī*, Albert Blanchard, Paris, 2004, p. 62–66 et 106–120 ; ainsi que le traité de Thābit ibn Qurra étudié par Hélène Bellosta dans « Le traité de Thābit ibn Qurra sur *La figure secteur* », *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 14 (2004) p. 145–168.

²⁵ cf. R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān*, p. 24–30.

²⁶ *Geometry and Dioptrics* p. 12–15 et 44–46.

(par exemple al-Kindī au IX^e s.) construisant des miroirs ardents de forme parabolique ou ellipsoïdale, et celle de l'optique de Ptolémée qui offrait une étude de la réfraction sans toutefois connaître la loi de Snell-Descartes. Les instruments ardents considérés par Ibn Sahl sont les miroirs parabolique et ellipsoïdal, la lentille plan-convexe et la lentille biconvexe hyperboloïdales.

R. Rashed qualifie Ibn Sahl de « géomètre doublé d'un artisan », ce qui le conduit, dans son étude des lentilles, outre la découverte d'une propriété géométrique de l'hyperbole (conséquence simple de sa caractérisation focale), à *modéliser* le phénomène de la réfraction en énonçant la loi de Snell-Descartes. Ibn Sahl, en effet, commence ainsi la dioptrique, discipline « riche en matériel technique, et en fait très pauvre par son contenu physique », excluant aussi bien la question physique de la nature de la lumière que l'étude de la vision²⁷.

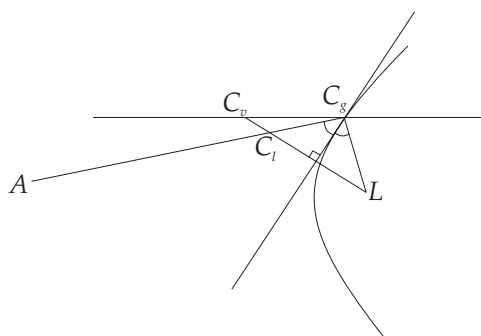
Ibn Sahl démontre que les trois sections coniques (définies par leurs *symptomata*) vérifient les propriétés focales. Il se doit, comme ses prédécesseurs, d'expliquer la construction des courbes intervenant dans les instruments ardents ; il décrit donc un mécanisme pour le tracé continu des trois sections, que nous avons déjà mentionné. Les solides obtenus par rotation de ces courbes autour de leurs axes sont les instruments ardents, miroirs ou lentilles, dont Ibn Sahl étudie ensuite le plan tangent en chaque point pour démontrer que ces instruments atteignent le but qu'il s'était fixé, de concentrer un certain faisceau de rayons en un point après réflexion ou réfraction.

Alors que dans un premier travail sur la « transparence de la sphère céleste » Ibn Sahl attribuait à chaque milieu transparent une certaine opacité spécifique, il franchit un pas de plus dans son travail sur les lentilles en caractérisant le milieu par un rapport de segments constant, qui n'est autre que le rapport $\frac{1}{n}$ des sinus des angles d'incidence et de réfraction, inverse de l'indice de réfraction du milieu par rapport à l'air. Il ne donne aucune justification physique de la constance du rapport $\frac{1}{n}$, ni même explique-t-il jamais comment il a découvert cette loi. Peut-être faut-il y voir d'abord une découverte géométrique (avant même la loi physique), la découverte de la propriété géométrique de l'hyperbole d'excentricité $\frac{1}{n}$ et de foyers A et L , conséquence simple de la caractérisation focale :

$$\frac{C_g C_l}{C_g C_v} = \frac{AC_l}{AL} = \frac{AC_g - C_g L}{AL} = \text{constante.}$$

²⁷ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 178.

La figure suivante précise certaines notations :



Une lentille plan-convexe dans un matériau d'indice de réfraction avec l'air $\frac{1}{n}$, dont les sections planes parallèles à l'axe ont la forme d'un segment de cette hyperbole, vérifieront alors la propriété anaclastique de faire converger vers A un faisceau de rayons parallèles à l'axe. Ibn Sahl aurait été naturellement conduit à s'interroger sur les propriétés de l'hyperbole utiles en optique en cherchant d'une part à généraliser les travaux de catoptriciens grecs qui avaient utilisé parabole et ellipse pour les miroirs ardents, et en *modélisant* d'autre part le phénomène de la réfraction qu'avait déjà observé Ptolémée²⁸.

Dans son *Optique*, Ibn al-Haytham a donné ensuite une étude plus physique de la réfraction. Mais comme Ptolémée et à la différence d'Ibn Sahl, il n'étudie que la dépendance fonctionnelle entre les valeurs numériques des angles d'incidence et de réfraction, et non le rapport de leurs sinus. Il semble pourtant avoir connu les travaux d'Ibn Sahl ; ce « pas en arrière » fait l'objet d'intéressants commentaires de R. Rashed²⁹ qui voit en Ibn al-Haytham le premier physicien qu'il connaisse « pour lequel l'expérimentation ne se réduit pas à un élément d'une méthodologie empirique, mais fait partie intégrante et nécessaire de la preuve en physique »³⁰. Or c'est le rôle de l'expérimentation dans sa recherche qui expliquerait ici le retour à la physique de Ptolémée³¹. Dans les conditions expérimentales adoptées par Ibn al-Haytham (verre/air, $n = \frac{2}{3}$, angle d'incidence $i < 30^\circ$), R. Rashed montre qu'il énonce des règles exactes sur la dépendance fonctionnelle entre angle d'incidence et angle de réfraction³². De plus, dans une étude sur la lentille sphérique, Ibn al-Haytham découvre un cas d'aberration sphérique. Soit D le centre de la sphère, K et O deux points hors de la sphère, d'où sont issus deux rayons convergeant vers

²⁸ Sur le sens précis à donner à cette construction d'un modèle mathématique, cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 73.

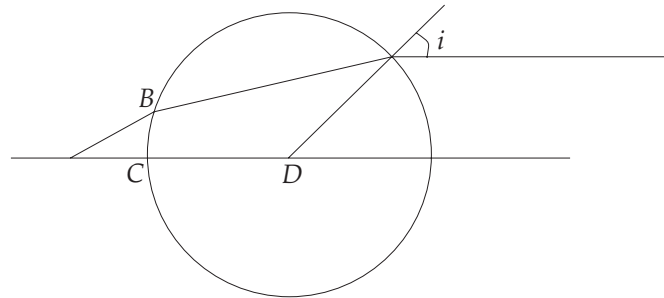
²⁹ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 177–182 et 1039–1045.

³⁰ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 181.

³¹ R. Rashed présente d'ailleurs sur ce sujet, en fin de volume, une petite étude philologique retraçant – de manière conjecturale – l'origine du mot « expérimentation » *i'tibār* dans l'œuvre d'Ibn al-Haytham, et en indiquant ses différents usages.

³² cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 152, et R. Rashed, « Le Discours de la lumière d'Ibn al-Haytham : traduction française critique », *Revue d'histoire des sciences*, 21 (1968), p. 197–224. Au contraire, les conclusions qu'en tire Ibn al-Haytham dans son étude du dioptrique sphérique sont parfois erronées. Soit A un point extérieur à la sphère, il est exact que pour tout point B intérieur à la sphère il existe un unique rayon de B réfracté vers A , mais pas pour tout point du plan, cf. *Geometry and Dioptrics* p. 155.

A après avoir subi deux réfractions, avec K , O , D et A alignés. Alors en tout point de $[KO]$ il existe un rayon qui passe par A après avoir subi deux réfractions. L'oeil en A perçoit donc un objet placé le long de $[KO]$ sous la forme d'un anneau à la surface de la sphère. Dans un texte ultérieur, le *Traité sur la sphère ardente*, Ibn al-Haytham utilise la lentille sphérique comme instrument ardent. Il faut alors placer la source lumineuse en A . Il étudie le cas où A est à l'infini (rayons parallèles), et tente de déterminer le segment $[OK]$ maximal, c'est-à-dire le lieu de tous les points de (AD) en lesquels convergent des rayons du faisceau issu de A après deux réfractions.



Il étudie à cet effet la variation de l'arc $\widehat{CB} = i - 2d$ en fonction de i au moyen de données expérimentales, et il repère l'existence d'un maximum sur l'intervalle $40^\circ < i < 50^\circ$ (i est l'angle d'incidence et d l'« angle de déviation » lors de la première réfraction à la surface de la lentille sphérique). Trois siècles plus tard, al-Fārisī (mort en 1319) tentera de préciser cette étude dans un commentaire déjà célèbre, en construisant une représentation approchée de la fonction $f(i) = \frac{d}{i}$ au moyen d'une formule d'interpolation de degré 2 (qu'utilisaient déjà les astronomes au X^e siècle) pour $i \in [0, 40^\circ]$. Cette méthode d'interpolation, qui faisait l'objet de conjectures de la part des historiens, a été retrouvée par R. Rashed dans une glose à l'un des manuscrits³³.

Nous espérons l'avoir montré, le livre *Geometry and Dioptrics in Classical Islam* est un excellent ouvrage, non seulement pour la précision des analyses de R. Rashed et le corpus en langue arabe auquel il nous donne accès, mais aussi pour les vues globales, encore en chantier, qu'il nous offre sur l'histoire de la géométrie : il n'est désormais plus possible de confiner les mathématiques arabes médiévales dans un étroit territoire disciplinaire en réduisant leur domaine de recherche à l'algèbre, alors qu'elles accueilleraient au sein de la géométrie plusieurs branches nouvelles et fécondes.

³³ cf. *Geometry and Dioptrics*, p. 170–177 et 288–291.